Método de la Viga Conjugada

VIGA ISOSTÁTICA

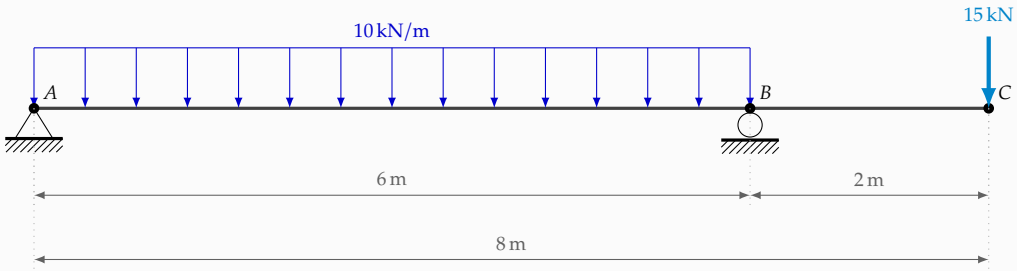
EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

El diagrama M/EI de la viga real se aplica como **carga repartida** sobre una viga ficticia, la **viga conjugada**, cuyos apoyos se eligen para que su cortante y su momento sean el giro y la flecha de la real:

$$\bar{w}(x) = \frac{M(x)}{EI}, \qquad \bar{V}(x) = \theta(x), \qquad \bar{M}(x) = \delta(x)$$

Con θ antihorario y δ hacia arriba positivos, un M/EI positivo (tracción abajo) carga hacia arriba. Los diagramas se dibujan del lado de la tracción, así que sus flechas apuntan siempre a la viga.



Estructura analizada.

Paso 1 Clasificación estática

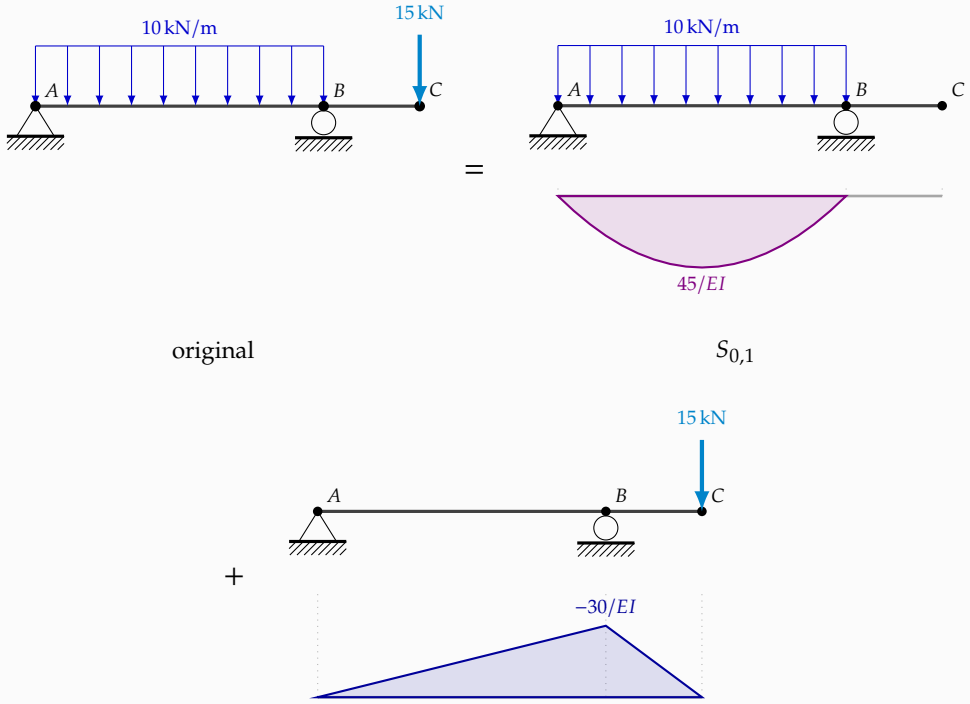
Componentes de reacción: A_y, B_y (2) frente a 2 ecuaciones de equilibrio:

$$\text{GE} = 2 - 2 = 0$$

$$g = \text{GE} = 0 = \boxed{0} \quad \Rightarrow \quad \text{isostática}$$

Las 2 componentes de reacción salen de la estática, así que no hay redundantes: el diagrama M/EI de la viga se carga sobre la viga conjugada y de su equilibrio salen los giros y las flechas.

$$\frac{M}{EI} = \frac{M_{0,1}}{EI} + \frac{M_{0,2}}{EI}$$

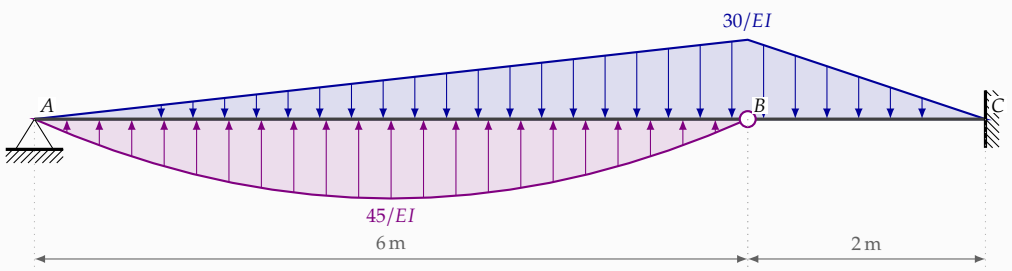


Principio de superposición.
La estructura original equivale a la primaria con cada carga real por separado ($S_{0,j}$). Debajo de cada uno va su diagrama de momentos dividido entre EI.

Paso 2 Viga conjugada

Cada apoyo real se cambia por el que hace que $\bar{V}$ y $\bar{M}$ valgan el giro y la flecha de ese punto:

Nudo	Viga real	Viga conjugada
A	Apoyo simple: $\delta = 0,\ \theta \neq 0$	Apoyo simple: $\bar{M} = 0,\ \bar{V} \neq 0$
B	Apoyo interior: $\delta = 0$, θ continuo	Rótula: $\bar{M} = 0$, $\bar{V}$ continuo
C	Extremo libre: $\delta \neq 0,\ \theta \neq 0$	Empotramiento: $\bar{M} \neq 0,\ \bar{V} \neq 0$



Viga conjugada cargada con el diagrama M/EI, cada uno como repartida.

Paso 3 Resultantes de las cargas

Cada diagrama se parte en piezas de área y centroide conocidos; $\bar{x}$ se mide desde el extremo izquierdo:

Pieza	Sistema	Forma	$[x_1,\ x_2]$	Resultante	Sentido	$\bar{x}$
R_1	$S_{0,1}$	Parábola	$[0,\ 6]$	$\frac{\frac{2}{3}(45)(6)}{EI} = \frac{180}{EI}$	$\uparrow$	$\frac{1}{2}(6) = 3$
R_2	$S_{0,2}$	Triángulo	$[0,\ 6]$	$\frac{\frac{1}{2}(30)(6)}{EI} = \frac{90}{EI}$	$\downarrow$	$\frac{2}{3}(6) = 4$
R_3	$S_{0,2}$	Triángulo	$[6,\ 8]$	$\frac{\frac{1}{2}(30)(2)}{EI} = \frac{30}{EI}$	$\downarrow$	$6 + \frac{1}{3}(2) = 6.667$

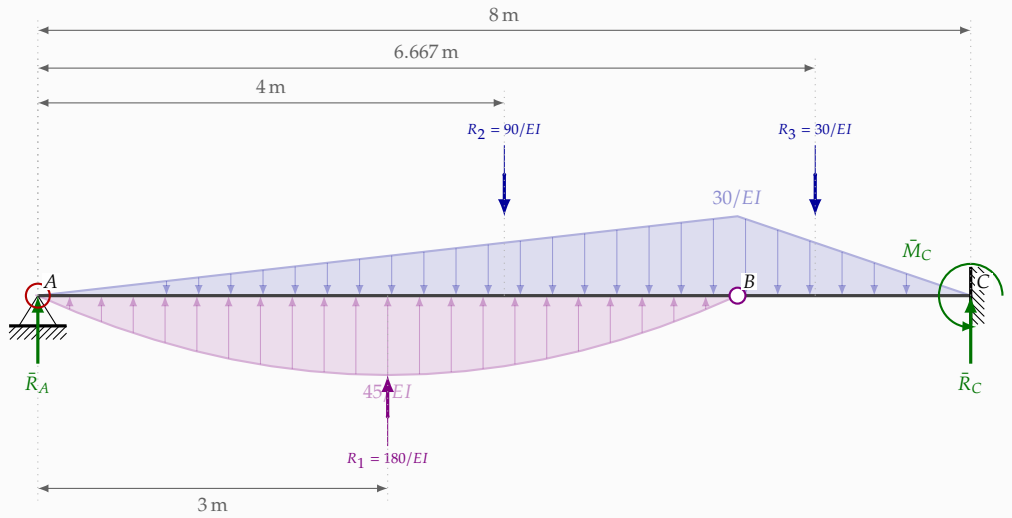
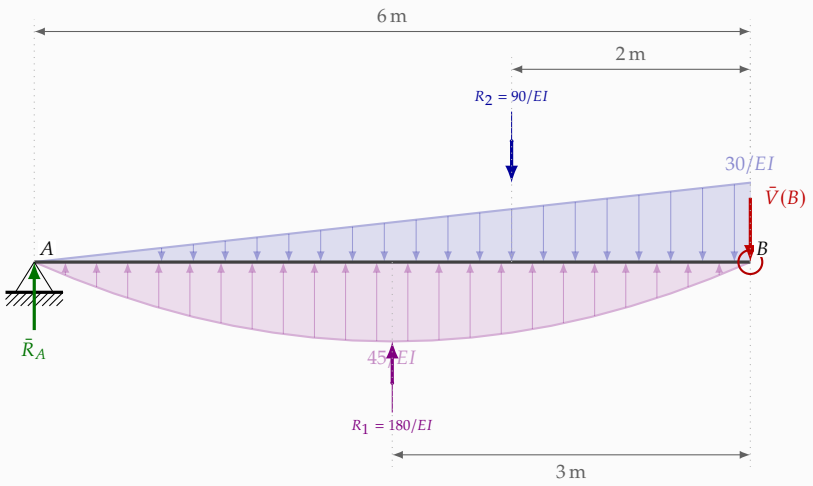


Diagrama de la viga conjugada atenuado, con la resultante de cada pieza, las reacciones y los brazos hasta A.

Paso 4 Equilibrio de la viga conjugada

3 incógnitas ($\bar{R}_A$, $\bar{R}_C$, $\bar{M}_C$) y 3 ecuaciones: equilibrio global y $\bar{M} = 0$ en cada rótula.



Trozo a la izquierda de B, para $\sum \bar{M}_B^{izq} = 0$.

$$(\uparrow +)\ \sum \bar{F}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{R}_A + \bar{R}_C + \frac{1}{EI}\Big[180 - 90 - 30\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{R}_A + \bar{R}_C + \frac{60}{EI} = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum \bar{M}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 8\,\bar{R}_C + \bar{M}_C + \frac{1}{EI}\Big[(180)(3) - (90)(4) - (30)(6.667)\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8\,\bar{R}_C + \bar{M}_C + \frac{-20}{EI} = 0 \quad \text{... (II)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum \bar{M}_B^{izq} = 0 \quad \Rightarrow \quad -6\,\bar{R}_A + \frac{1}{EI}\Big[-(180)(3) + (90)(2)\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \quad -6\,\bar{R}_A + \frac{-360}{EI} = 0 \quad \text{... (III)}$$

Resolviendo (I), (II) y (III) obtenemos:

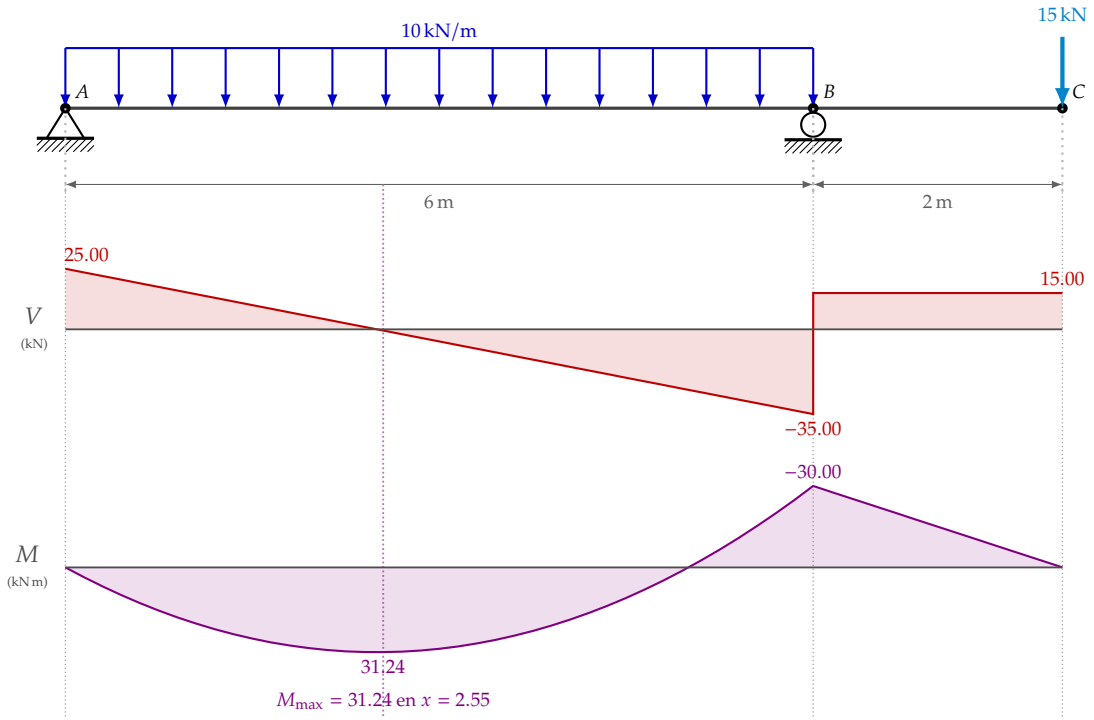
$$\Rightarrow \quad \bar{R}_A = \boxed{\frac{-60\ \text{kN m}^2}{EI}}$$

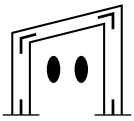
$$\Rightarrow \quad \bar{R}_C = \boxed{\frac{0\ \text{kN m}^2}{EI}}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{M}_C = \boxed{\frac{20\ \text{kN m}^3}{EI}}$$

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M





Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com