Método matricial sólido rígido

PÓRTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Modelo: pórtico plano, 3 GDL por nudo (u, v, θ). Las incógnitas son los desplazamientos D de las coordenadas del **sistema** Q–D: en cada coordenada se aplica una fuerza Q_i y se mide un desplazamiento D_i. Las barras declaradas rígidas se mueven como **sólidos rígidos**: una barra $A = \infty$ no cambia de longitud y una $I = \infty$ no se curva, así que ligan unos desplazamientos con otros y solo quedan como coordenadas los GDL **independientes**, como en el método con restricciones cinemáticas. La matriz de rigidez se construye **columna a columna**, como en el método de rigidez directo, preguntándole a la estructura estado por estado:

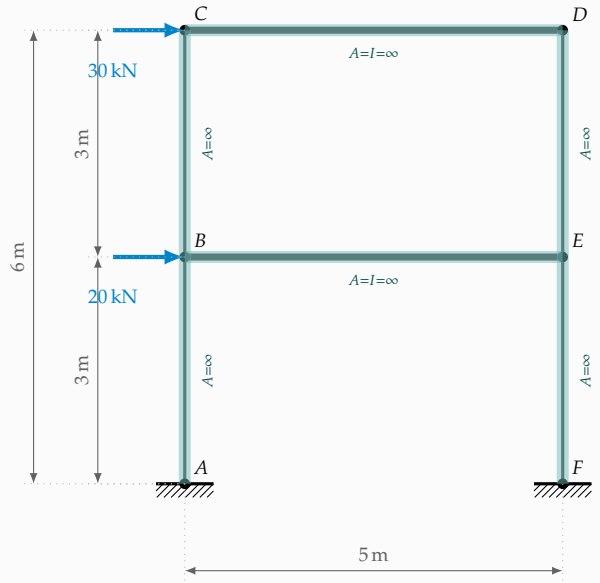
$$D_j = 1, \quad D_i = 0\ (i \neq j) \qquad \Longrightarrow \qquad k_{ij} = \text{fuerza en la coordenada } i \text{ que sostiene ese estado}$$

y el resto del camino es:

$$Q = -R, \qquad D = K^{-1}Q, \qquad \{M_F\} = \{M_e^0\} + [k_e]\{D\}$$

donde R son las **fuerzas de fijación** del problema primario y M_e^0, las fuerzas de empotramiento de cada barra. Las reacciones se cierran al final por estática. Las coordenadas de giro se miden en sentido **antihorario** (se elige en el panel *Sentido del giro*). Todas las barras que trabajan entran con la misma rigidez de referencia, así que el desarrollo se lleva **en función de** EI: cada término de K sale como un múltiplo de EI y los desplazamientos, como C/EI.

Datos de la estructura



Geometría, apoyos y cargas. En trazo grueso verde, las barras rígidas (sólidos rígidos).

Barra	Nudos	L (m)	E (kN/m^2)	A (m^2)	I (m^4)	Clase
1	A–B	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
2	B–C	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
3	C–D	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)
4	D–E	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
5	E–F	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
6	B–E	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

Acción	Valor
Carga en nudo B	$P = 20$ kN $\angle 0°$
Carga en nudo C	$P = 30$ kN $\angle 0°$

Clasificación estática: $GH = 3m + r - 3n - h = 18 + 6 - 18 - 0 = 6 \Rightarrow$ estructura **hiperestática g=6**.

Paso 1 Sistema Global Q–D, Sistema Local q–d

Antes de numerar, se cuentan. Cada junta tiene tres grados de libertad (u, v, θ) y pierde los que le impiden los apoyos y le quitan las barras rígidas:

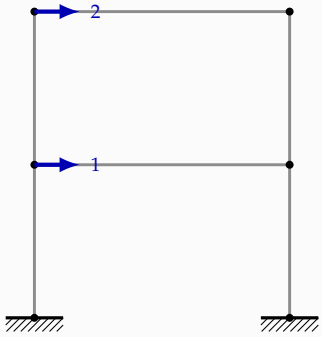
$$\text{NGL} = 3\,\text{NDJ} - \sum(\text{NDJ})_E\, V - A - 2T$$

donde NDJ es el número de juntas; $(\text{NDJ})_E$, las juntas externas (las que tienen apoyo), con $V = 1$ si el vínculo es un rodillo, $V = 2$ si es una articulación y $V = 3$ si es un empotramiento; A, el número de barras axialmente rígidas, y T, el de barras transversalmente rígidas, que quitan dos cada una (los dos giros de extremo quedan ligados al de la cuerda).

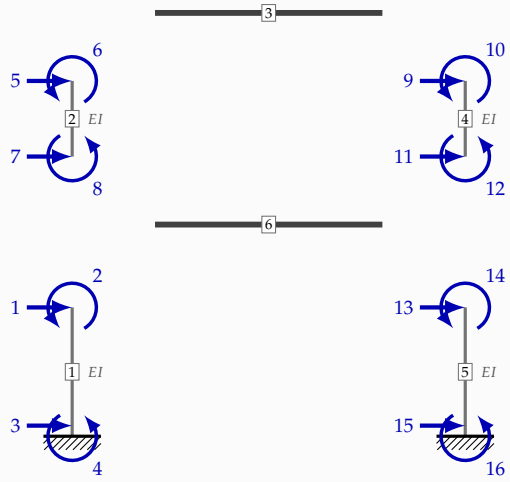
- NDJ = 6 juntas.
- Juntas externas: A (empotramiento, $V = 3$) y F (empotramiento, $V = 3$); así que $\sum(\text{NDJ})_E\, V = 3 + 3 = 6$.
- Barras axialmente rígidas ($A = \infty$): 1, 2, 3, 4, 5 y 6; así que $A = 6$.
- Barras transversalmente rígidas ($I = \infty$): 3 y 6; así que $T = 2$.

$$\text{NGL} = 3(6) - (3 + 3) - 6 - 2(2) = \boxed{2}$$

Las NGL = 2 coordenadas se numeran de 1 a 2: son las incógnitas $D_1, \ldots, D_2$ del sistema.



Sistema global Q–D



Sistema local q–d

Los otros desplazamientos libres quedan ligados a estas coordenadas por las barras rígidas:

$$u_D = D_2$$
$$u_E = D_1$$

Y los demás no se mueven, porque las barras rígidas no los dejan: $v_B = \theta_B = v_C = \theta_C = v_D = \theta_D = v_E = \theta_E = 0$.

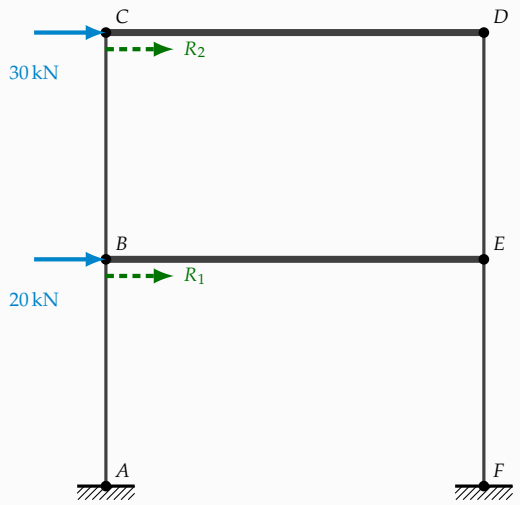
Paso 2 Vector de cargas Q

El sistema $K\,D = Q$ está escrito en las coordenadas del sistema Q–D, así que Q solo puede contener fuerzas aplicadas en ellas. Para llevar allí todas las cargas, las de los nudos y las que actúan sobre los elementos, la solución se descompone en dos problemas:

$$\text{Solución} = \text{problema primario} + \text{problema complementario}$$

En el **problema primario** actúan todas las cargas y, para que ningún nudo se mueva ($D = 0$), unas **fuerzas de fijación** $R_1, \ldots, R_2$, una por coordenada, dibujadas en el *sentido* de su coordenada (una R negativa actúa al revés). Se resuelve en dos partes: el equilibrio de los elementos y el equilibrio de las juntas.

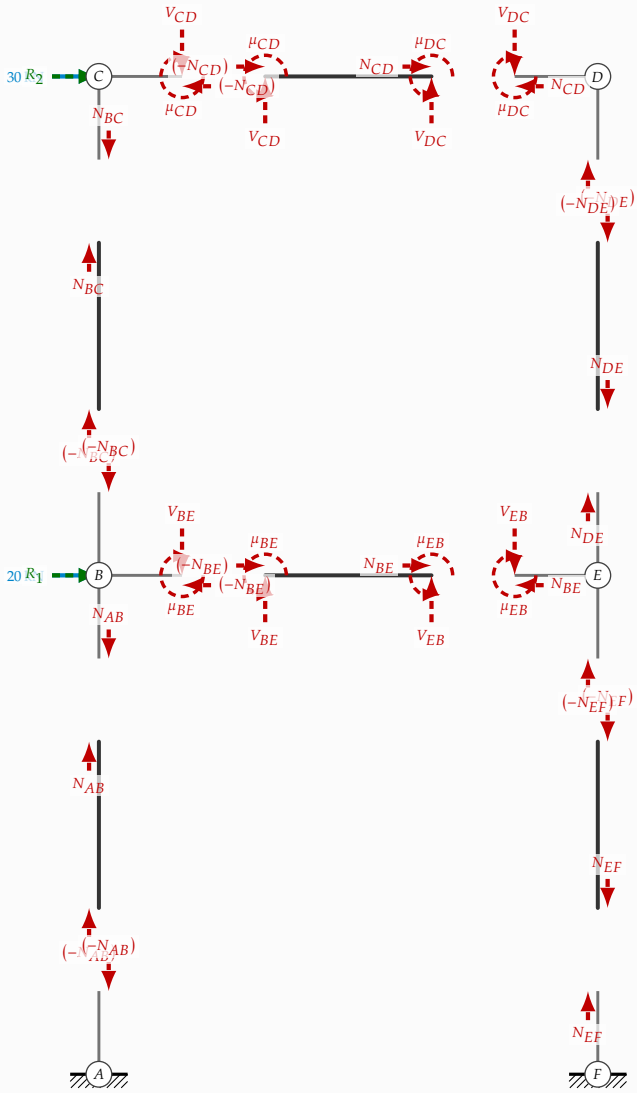
Problema primario ($D = 0$)



Problema primario ($D = 0$): las cargas de la estructura y las fuerzas de fijación R (verde, a trazos), en el sentido de las coordenadas.

i) Equilibrio de elementos

Con $D = 0$ ningún nudo se mueve: cada barra trabaja como empotrada en sus dos extremos.



*La estructura desmembrada: cada barra separada de sus nudos. En cada hueco, la fuerza que el nudo le hace a la barra —las de **empotramiento perfecto**, que se calculan debajo— y en el nudo, su reacción, las cargas aplicadas en él y la fijación R (verde, a trazos). Lo que va a rayas todavía es incógnita.*

Las barras 1 (A–B), 2 (B–C), 4 (D–E) y 5 (E–F) no llevan carga en el vano, pero no se alargan ($A = \infty$): sus axiles no salen de la rigidez, son las incógnitas N_{AB}, N_{BC}, N_{DE} y N_{EF} (tracción positiva).

Barra 3 (C–D): $A = I = \infty$ La barra no trabaja a flexión ($I = \infty$): como $p_1 = p_2 = 0$ por ligadura, sus momentos de extremo no salen de la rigidez, sino que son incógnitas: μ_{CD} y μ_{DC} (antihorario positivo, como los MEP). Son momentos *totales*: los de empotramiento de la carga más lo que añade la condición $I = \infty$. El sentido positivo es arbitrario; lo importante es que los cortantes concuerden con ellos para que haya equilibrio. Tampoco se alarga ($A = \infty$): su axil es otra incógnita, N_{CD} (tracción positiva). Sin carga en el vano, el cortante es solo el que producen los momentos.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} = \frac{\mu_{CD} + \mu_{DC}}{5}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DC} = -V_{CD} = -\frac{\mu_{CD} + \mu_{DC}}{5}$$

Barra 6 (B–E): $A = I = \infty$ La barra no trabaja a flexión ($I = \infty$): como $p_1 = p_2 = 0$ por ligadura, sus momentos de extremo no salen de la rigidez, sino que son incógnitas: μ_{BE} y μ_{EB} (antihorario positivo, como los MEP). Son momentos *totales*: los de empotramiento de la carga más lo que añade la condición $I = \infty$. El sentido positivo es arbitrario; lo importante es que los cortantes concuerden con ellos para que haya equilibrio. Tampoco se alarga ($A = \infty$): su axil es otra incógnita, N_{BE} (tracción positiva). Sin carga en el vano, el cortante es solo el que producen los momentos.

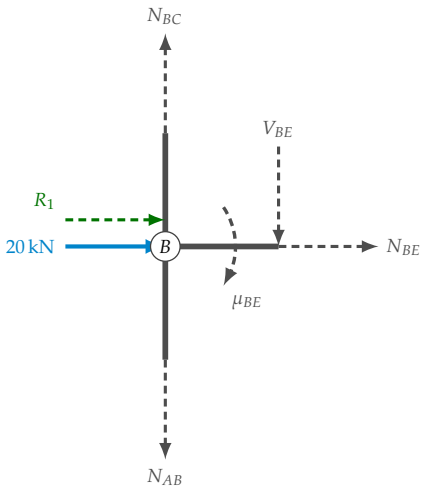
$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BE} = \frac{\mu_{BE} + \mu_{EB}}{5}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{EB} = -V_{BE} = -\frac{\mu_{BE} + \mu_{EB}}{5}$$

ii) Equilibrio de juntas

Cada junta tiene que estar en equilibrio: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$, una ecuación por cada GDL libre (en una dirección que impide un apoyo, lo absorbe su reacción y no se escribe). Se separa cada junta con las cargas aplicadas en ella, las fuerzas que le transmiten las barras (las del paso anterior, cambiadas de sentido) y las fuerzas de fijación. En el dibujo, las fuerzas de las barras van en la punta de su muñón para que se vea de qué barra vienen, pero actúan en la propia junta: en $\sum M$ solo entran los momentos. En azul, lo ya conocido; en negro a trazos, lo que depende de una incógnita.

Junta B



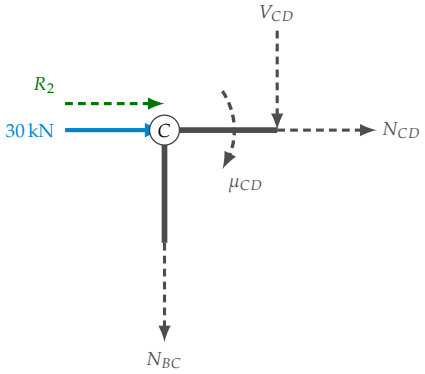
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 + N_{BE} + R_1 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{AB} + N_{BC} - V_{BE} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{AB} + N_{BC} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{BE} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{EB} = 0 \quad \text{... (II)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{BE} = 0 \quad \text{... (III)}$$

Junta C



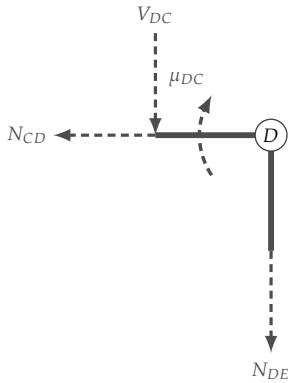
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 30 + N_{CD} + R_2 = 0 \quad \text{... (IV)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{BC} - V_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -N_{BC} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{CD} - \tfrac{1}{5}\,\mu_{DC} = 0 \quad \text{... (V)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{CD} = 0 \quad \text{... (VI)}$$

Junta D



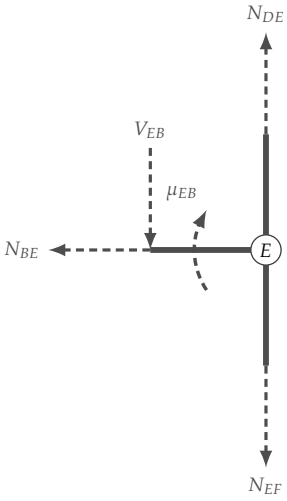
$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{CD} = 0 \quad \text{... (VII)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{DC} - N_{DE} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{5}\,\mu_{CD} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{DC} - N_{DE} = 0 \quad \text{... (VIII)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{DC} = 0 \quad \text{... (IX)}$$

Junta E



$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_{BE} = 0 \quad \text{... (X)}$$
$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{DE} - N_{EF} - V_{EB} = 0$$
$$\Rightarrow \quad N_{DE} - N_{EF} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{BE} + \tfrac{1}{5}\,\mu_{EB} = 0 \quad \text{... (XI)}$$
$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu_{EB} = 0 \quad \text{... (XII)}$$

Solución del sistema Son 12 ecuaciones con 12 incógnitas: las 10 fuerzas de las ligaduras y las 2 fijaciones. Las ecuaciones sin fijaciones (las de los GDL dependientes) dan primero las fuerzas de las ligaduras; después, cada fijación sale de la ecuación de su propio GDL, la única en la que aparece:

$$\text{(III)} \quad -\mu_{BE} = 0 \Rightarrow \mu_{BE} = \boxed{0}$$
$$\text{(VI)} \quad -\mu_{CD} = 0 \Rightarrow \mu_{CD} = \boxed{0}$$
$$\text{(VII)} \quad -N_{CD} = 0 \Rightarrow N_{CD} = \boxed{0}$$
$$\text{(IX)} \quad -\mu_{DC} = 0 \Rightarrow \mu_{DC} = \boxed{0}$$
$$\text{(X)} \quad -N_{BE} = 0 \Rightarrow N_{BE} = \boxed{0}$$
$$\text{(XII)} \quad -\mu_{EB} = 0 \Rightarrow \mu_{EB} = \boxed{0}$$
$$\text{(V)} \quad -N_{BC} - \tfrac{1}{5}(0) - \tfrac{1}{5}(0) = 0 \Rightarrow N_{BC} = \boxed{0}$$
$$\text{(VIII)} \quad \tfrac{1}{5}(0) + \tfrac{1}{5}(0) - N_{DE} = 0 \Rightarrow N_{DE} = \boxed{0}$$
$$\text{(XI)} \quad (0) - N_{EF} + \tfrac{1}{5}(0) + \tfrac{1}{5}(0) = 0 \Rightarrow N_{EF} = \boxed{0}$$
$$\text{(II)} \quad -N_{AB} + (0) - \tfrac{1}{5}(0) - \tfrac{1}{5}(0) = 0 \Rightarrow N_{AB} = \boxed{0}$$
$$\text{(I)} \quad R_1 + (0) + 20 = 0 \Rightarrow R_1 = \boxed{-20}$$
$$\text{(IV)} \quad R_2 + (0) + 30 = 0 \Rightarrow R_2 = \boxed{-30}$$

Con eso queda resuelto el primario. Las fijaciones, en el orden de las coordenadas:

$$R = \begin{bmatrix} -20 \\ -30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

En la estructura real no hay ninguna fuerza de fijación: hay que quitarlas. Eso es el **problema complementario**: la estructura sin cargas, con $-R$ en las coordenadas. Se resuelve en rigidez, con los estados unitarios del apartado siguiente, y por eso $Q = -R$ (apartado 5). El primario queda así resuelto, y con sus fuerzas de extremo se dibuja su **diagrama de momentos**, el primer sumando de la solución:

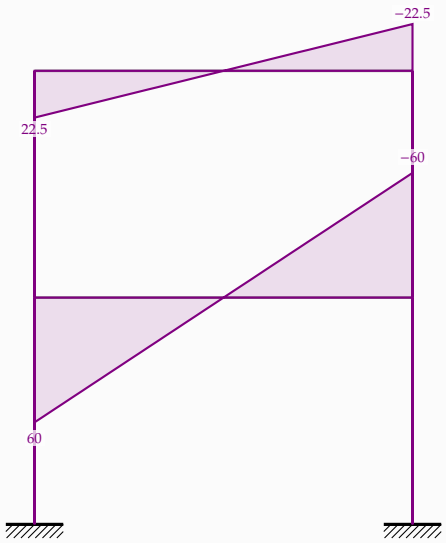


Diagrama de momentos del problema primario, $\{M\}_p$ (en kN m), dibujado del lado de la tracción.

Paso 3 Problema complementario

En el complementario la estructura está descargada y en sus coordenadas actúa $Q = -R$. Se resuelve en rigidez: la matriz K se levanta columna a columna con un estado deformado unitario por coordenada. Cada estado se contesta con las fuerzas de extremo de siempre: un **giro** unitario de un extremo pide $4EI/L$ en ese extremo, $2EI/L$ en el otro y el par de cortantes $6EI/L^2$ que los equilibra; un **desplazamiento transversal** unitario, $6EI/L^2$ en los dos extremos y los cortantes $12EI/L^3$; y un **alargamiento** unitario, EA/L. Con un extremo rotulado son los condensados de su barra. Las barras rígidas no se deforman en su sentido rígido: en cada estado se mueven *enteras*, como sólidos rígidos, y arrastran a los GDL dependientes. Por eso no aportan fuerzas propias en esa dirección; solo transmiten las de las demás. Como una coordenada mueve también a sus dependientes, la fuerza que sostiene el estado j en la coordenada i se obtiene por **trabajos virtuales**: cada fuerza de extremo del estado j, $F^{(j)}$, por lo que se mueve su extremo en el estado i, $\delta^{(i)}$:

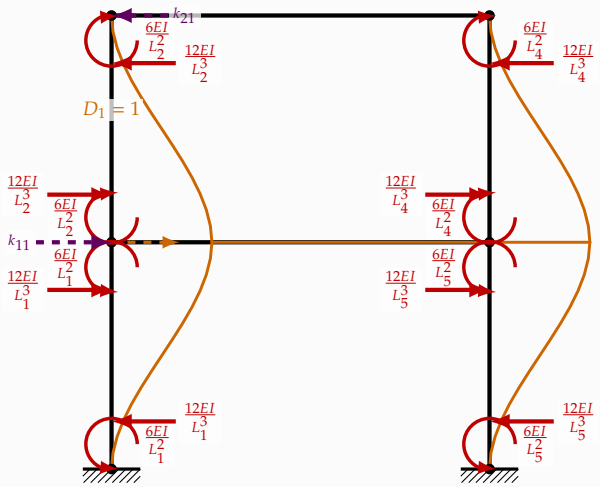
$$k_{ij} = \sum_{\text{barras}} \delta^{(i)} F^{(j)}$$

Si el extremo es el del propio GDL i, $\delta^{(i)} = 1$ y es la suma de fuerzas de siempre; si es un dependiente, lo que lo arrastre el sólido rígido. Las fuerzas internas de una barra rígida no entran: no trabajan en un movimiento que ella misma permite.

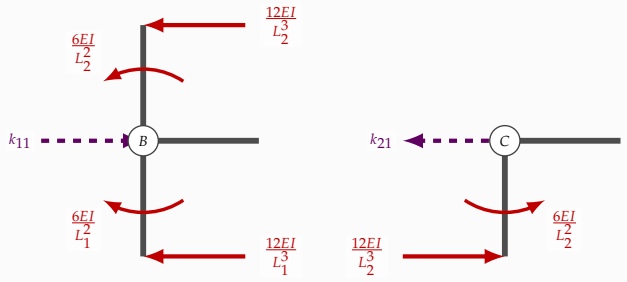
3.1 Estado deformado $D_1 = 1$, $D_i = 0$ si $i \neq 1$: traslación horizontal del nudo B

El sólido rígido arrastra a los GDL dependientes:

$$u_E = 1$$



*Estado $D_1 = 1$ con las demás coordenadas nulas. En negro la estructura original y en naranja la deformada (las barras rígidas se mueven sin deformarse). En **rojo**, las fuerzas de extremo que aparecen en cada barra deformada; en **violeta** a trazos, las k_{i1} que hay que aplicar en las coordenadas para sostener el estado (la columna 1 de K). Cada flecha va en el sentido en que de verdad actúa, así que su rótulo es el valor absoluto; el signo está en las cuentas de debajo.*



*Las juntas que reciben algo en este estado, **una al lado de otra**: de cada barra que llega sale un muñón con lo que esa barra le devuelve, y la suma de todo ello es la k_{i1} (violeta, a trazos) que hay que aplicar en esa coordenada para sostener el estado.*

Las barras 3, 6 no se deforman en este estado: no aportan ninguna fuerza. Llevando a cada coordenada lo que le entregan las barras, sale la columna 1 de K:

$$k_{11} = -V_b^{(1)} - V_a^{(2)} + V_b^{(4)} + V_a^{(5)} = \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3} + \frac{12EI}{L_4^3} + \frac{12EI}{L_5^3} = \frac{12EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} = \frac{16}{9}\,EI$$

$$k_{21} = -V_b^{(2)} + V_a^{(4)} = -\frac{12EI}{L_2^3} - \frac{12EI}{L_4^3} = -\frac{12EI}{3^3} - \frac{12EI}{3^3} = -\frac{8}{9}\,EI$$

$$K_{\cdot 1} = EI \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} D_1 \\ \begin{bmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

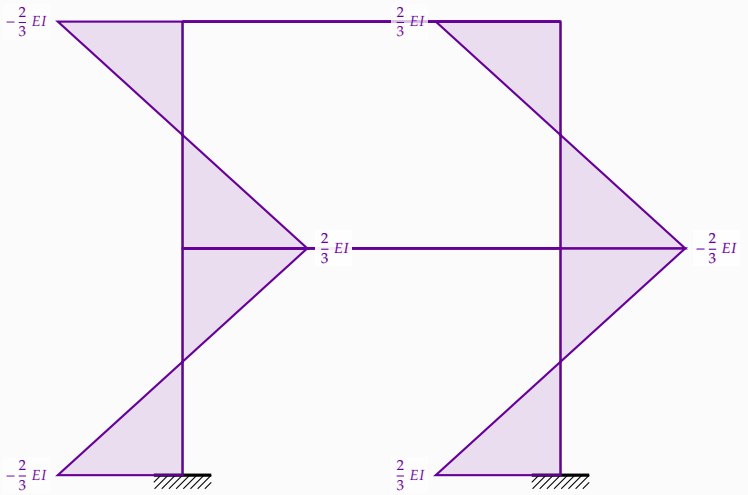
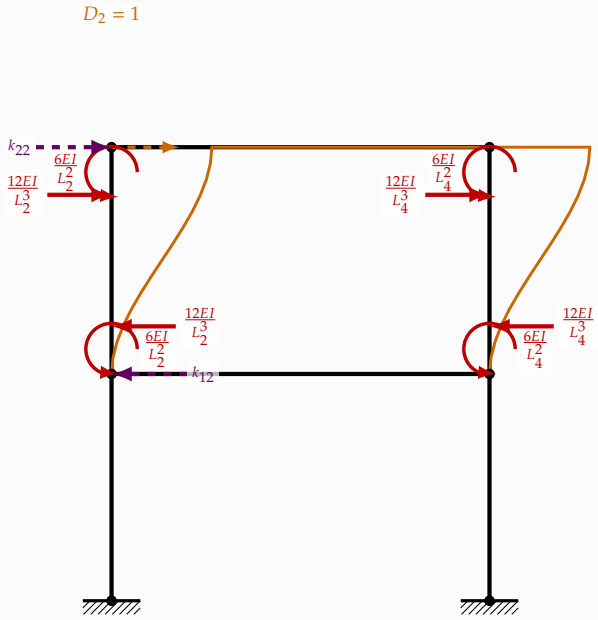


Diagrama de momentos del estado $D_1 = 1$, $\{M\}_1$ (en función de EI): son las fuerzas de extremo que acabamos de hallar.

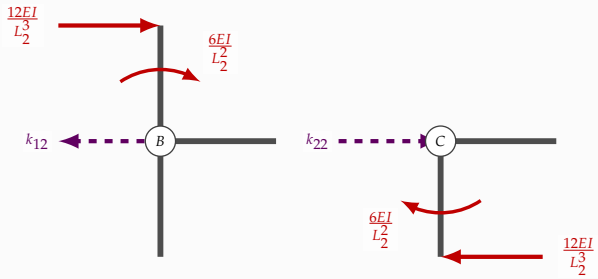
3.2 Estado deformado $D_2 = 1$, $D_i = 0$ si $i \neq 2$: traslación horizontal del nudo C

El sólido rígido arrastra a los GDL dependientes:

$$u_D = 1$$



*Estado $D_2 = 1$ con las demás coordenadas nulas. En negro la estructura original y en naranja la deformada (las barras rígidas se mueven sin deformarse). En **rojo**, las fuerzas de extremo que aparecen en cada barra deformada; en **violeta** a trazos, las k_{i2} que hay que aplicar en las coordenadas para sostener el estado (la columna 2 de K). Cada flecha va en el sentido en que de verdad actúa, así que su rótulo es el valor absoluto; el signo está en las cuentas de debajo.*



*Las juntas que reciben algo en este estado, **una al lado de otra**: de cada barra que llega sale un muñón con lo que esa barra le devuelve, y la suma de todo ello es la k_{i2} (violeta, a trazos) que hay que aplicar en esa coordenada para sostener el estado.*

Las barras 1, 3, 5, 6 no se deforman en este estado: no aportan ninguna fuerza. Llevando a cada coordenada lo que le entregan las barras, sale la columna 2 de K:

$$k_{12} = -V_a^{(2)} + V_b^{(4)} = -\frac{12EI}{L_2^3} - \frac{12EI}{L_4^3} = -\frac{12EI}{3^3} - \frac{12EI}{3^3} = -\frac{8}{9}EI$$

$$k_{22} = -V_b^{(2)} + V_a^{(4)} = \frac{12EI}{L_2^3} + \frac{12EI}{L_4^3} = \frac{12EI}{3^3} + \frac{12EI}{3^3} = \frac{8}{9}EI$$

$$K_{\cdot 2} = EI \begin{matrix} D_2 \\ \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

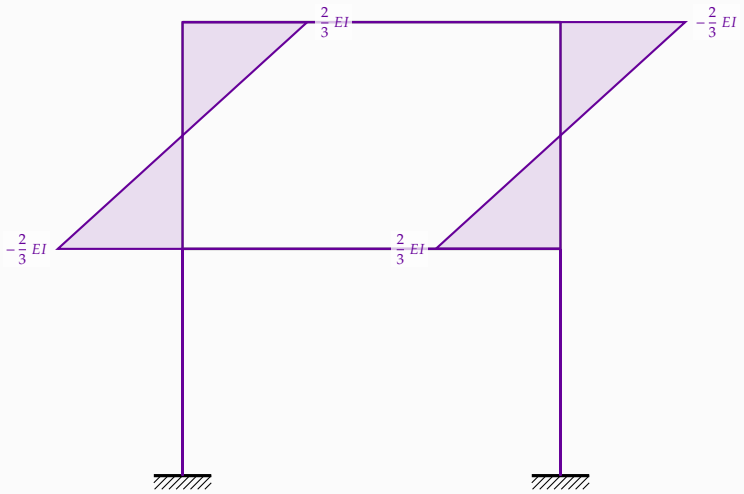


Diagrama de momentos del estado $D_2 = 1$, $\{M\}_2$ (en función de EI): son las fuerzas de extremo que acabamos de hallar.

Paso 4 Matriz de rigidez K global

Colocando cada columna en su sitio:

$$K = EI \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.778 & -0.8889 \\ -0.8889 & 0.8889 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

K sale **simétrica**, y no por casualidad: es el teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti, $k_{ij} = k_{ji}$. Es la comprobación más rápida de que las columnas están bien.

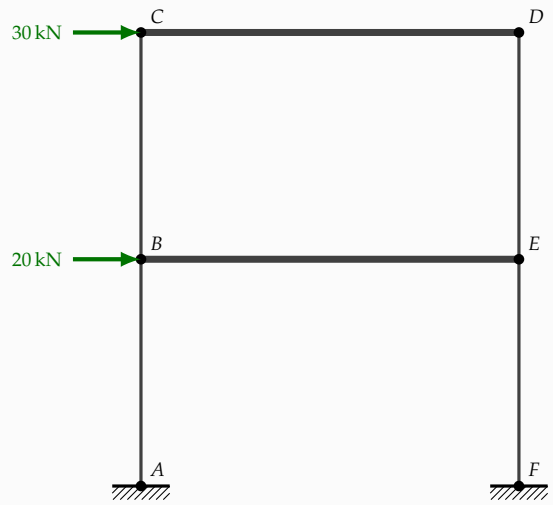
Paso 5 Vector de cargas $Q = -R$

En la estructura real no hay fijaciones: el complementario las devuelve cambiadas de signo. Coordenada a coordenada:

$$Q_1 = -R_1 = -(-20) = \boxed{20}$$

$$Q_2 = -R_2 = -(-30) = \boxed{30}$$

$$Q = -R = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$



Problema complementario: la estructura sin cargas, con $Q = -R$ en las coordenadas, cada fuerza en su sentido real (en kN y kN m).

Paso 6 Vector de desplazamientos D

$$D = K^{-1}\, Q$$

El sistema que hay que resolver:

$$EI \begin{bmatrix} \overset{1}{1.778} & \overset{2}{-0.8889} \\ -0.8889 & 0.8889 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Multiplicando por EI, las incógnitas pasan a ser los productos $EI\, D_i$, que son números limpios; el EI se devuelve al final.

$$EI\,D = \begin{bmatrix} 56.25 \\ 90 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Deshaciendo el EI, cada desplazamiento con su valor:

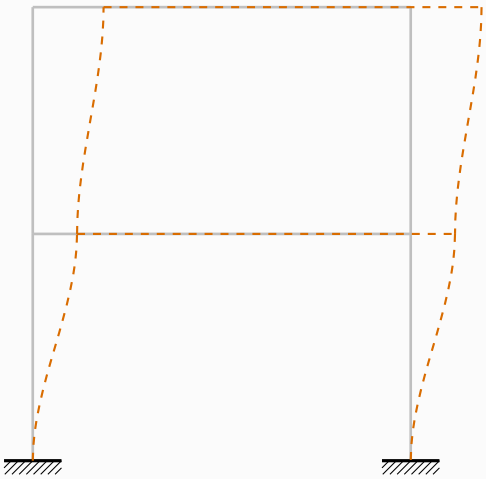
$$\begin{aligned} D_1 = u_B &= \frac{56.25\ \text{kN m}^3}{EI} \\ &= \frac{56.25\ \text{kN m}^3}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{56.25\ \text{kN m}^3}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= 0.002813\ \text{m} = \boxed{2.813\ \text{mm}}\ \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = u_C &= \frac{90\ \text{kN m}^3}{EI} \\ &= \frac{90\ \text{kN m}^3}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{90\ \text{kN m}^3}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= 0.0045\ \text{m} = \boxed{4.5\ \text{mm}}\ \rightarrow \end{aligned}$$

Y con las ligaduras del sólido rígido, los GDL dependientes:

$$u_D = 4.5\ \text{mm}, \qquad u_E = 2.813\ \text{mm}$$

Nudo	u (mm)	v (mm)	θ (rad)
A	0	0	0
B	2.813	0	0
C	4.5	0	0
D	4.5	0	0
E	2.813	0	0
F	0	0	0



Deformada (trazo naranja) amplificada ×208.3.

Diagrama de momentos del estado complementario

Cada estado unitario aporta su propia ley de momentos, y el complementario es la suma de todas ellas pesada por el desplazamiento que de verdad tiene cada coordenada:

$$\{M\}_c = \{M\}_1 D_1 + \{M\}_2 D_2$$

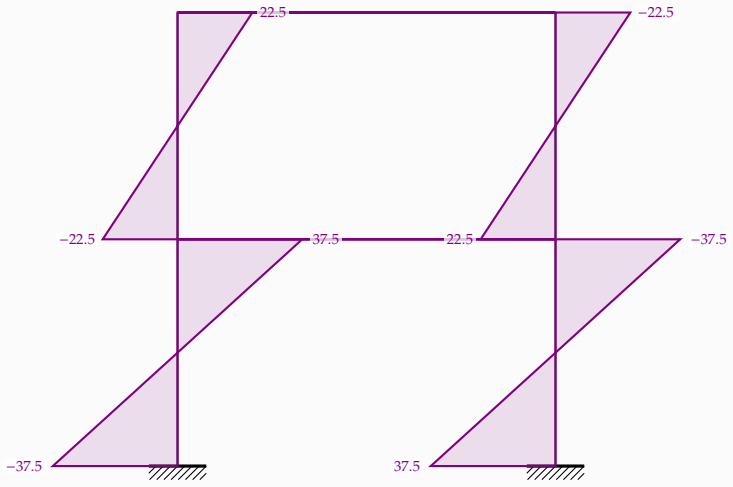


Diagrama de momentos del estado complementario, $\{M\}_c$ *(en kN m).*

Paso 7 Momentos finales de las barras

$$\{M_F\} = \{M_e^0\} + [k_e]\{D\}$$

Barra por barra: a sus fuerzas de empotramiento perfecto M_e^0 se les suma lo que producen los desplazamientos ya conocidos. $[k_e]$ es la matriz de la barra completa y $\{D\}$ el movimiento real de sus dos extremos, coordenadas y dependientes, pasado a ejes locales.

7.1 Barra 1 (A–B) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

Desplazamientos de sus extremos (ejes locales): $EI\,v'_b = -56.25$, el resto nulos.

$$V_a = (-0.4444)(-56.25) = \boxed{25}$$

$$M_a = (-0.6667)(-56.25) = \boxed{37.5}$$

$$V_b = (0.4444)(-56.25) = \boxed{-25}$$

$$M_b = (-0.6667)(-56.25) = \boxed{37.5}$$

El **axil** de esta barra no sale de $[k_e]$: con $A = \infty$ no hay $EA\,\Delta L/L$ que calcular, es la fuerza de la ligadura, y lo da el equilibrio de los nudos: $N_a = -33$, $N_b = 33$.

7.2 Barra 2 (B–C) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

Desplazamientos de sus extremos (ejes locales): $EI\,v'_a = -56.25$, $EI\,v'_b = -90$, el resto nulos.

$$V_a = (0.4444)(-56.25) + (-0.4444)(-90) = \boxed{15}$$

$$M_a = (0.6667)(-56.25) + (-0.6667)(-90) = \boxed{22.5}$$

$$V_b = (-0.4444)(-56.25) + (0.4444)(-90) = \boxed{-15}$$

$$M_b = (0.6667)(-56.25) + (-0.6667)(-90) = \boxed{22.5}$$

El **axil** de esta barra no sale de $[k_e]$: con $A = \infty$ no hay $EA\,\Delta L/L$ que calcular, es la fuerza de la ligadura, y lo da el equilibrio de los nudos: $N_a = -9$, $N_b = 9$.

7.3 Barra 3 (C–D) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

La barra no se curva ($I = \infty$): sus momentos no salen de $[k_e]$, son fuerzas de ligadura. Donde el nudo gira libre, los da el equilibrio de momentos del nudo con los de las demás barras, ya conocidos:

$$\textstyle\sum M_C = 0: \quad M_{CD} + M_{CB} = 0 \;\Rightarrow\; M_{CD} = -(22.5) = \boxed{-22.5}$$

$$\textstyle\sum M_D = 0: \quad M_{DC} + M_{DE} = 0 \;\Rightarrow\; M_{DC} = -(22.5) = \boxed{-22.5}$$

Y el cortante, del equilibrio de la barra (sin carga en el vano, solo el de los momentos de extremo):

$$V_a = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = \frac{-22.5 + (-22.5)}{5} = \boxed{-9}$$

$$V_b = -\frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} = \boxed{9}$$

El **axil** de esta barra no sale de $[k_e]$: con $A = \infty$ no hay $EA\,\Delta L/L$ que calcular, es la fuerza de la ligadura, y lo da el equilibrio de los nudos: $N_a = 15$, $N_b = -15$.

7.4 Barra 4 (D–E) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

Desplazamientos de sus extremos (ejes locales): $EI\,v'_a = 90$, $EI\,v'_b = 56.25$, el resto nulos.

$$V_a = (0.4444)(90) + (-0.4444)(56.25) = \boxed{15}$$

$$M_a = (0.6667)(90) + (-0.6667)(56.25) = \boxed{22.5}$$

$$V_b = (-0.4444)(90) + (0.4444)(56.25) = \boxed{-15}$$

$$M_b = (0.6667)(90) + (-0.6667)(56.25) = \boxed{22.5}$$

El **axil** de esta barra no sale de $[k_e]$: con $A = \infty$ no hay $EA\,\Delta L/L$ que calcular, es la fuerza de la ligadura, y lo da el equilibrio de los nudos: $N_a = 9$, $N_b = -9$.

7.5 Barra 5 (E–F) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

Desplazamientos de sus extremos (ejes locales): $EI\,v'_a = 56.25$, el resto nulos.

$$V_a = (0.4444)(56.25) = \boxed{25}$$

$$M_a = (0.6667)(56.25) = \boxed{37.5}$$

$$V_b = (-0.4444)(56.25) = \boxed{-25}$$

$$M_b = (0.6667)(56.25) = \boxed{37.5}$$

El **axil** de esta barra no sale de $[k_e]$: con $A = \infty$ no hay $EA\,\Delta L/L$ que calcular, es la fuerza de la ligadura, y lo da el equilibrio de los nudos: $N_a = 33$, $N_b = -33$.

7.6 Barra 6 (B–E) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

La barra no se curva ($I = \infty$): sus momentos no salen de $[k_e]$, son fuerzas de ligadura. Donde el nudo gira libre, los da el equilibrio de momentos del nudo con los de las demás barras, ya conocidos:

$$\textstyle\sum M_B = 0: \quad M_{BE} + M_{BA} + M_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; M_{BE} = -(37.5) - (22.5) = \boxed{-60}$$

$$\textstyle\sum M_E = 0: \quad M_{EB} + M_{ED} + M_{EF} = 0 \;\Rightarrow\; M_{EB} = -(22.5) - (37.5) = \boxed{-60}$$

Y el cortante, del equilibrio de la barra (sin carga en el vano, solo el de los momentos de extremo):

$$V_a = \frac{M_{BE} + M_{EB}}{L} = \frac{-60 + (-60)}{5} = \boxed{-24}$$

$$V_b = -\frac{M_{BE} + M_{EB}}{L} = \boxed{24}$$

El **axil** de esta barra no sale de $[k_e]$: con $A = \infty$ no hay $EA\,\Delta L/L$ que calcular, es la fuerza de la ligadura, y lo da el equilibrio de los nudos: $N_a = 10$, $N_b = -10$.

Resumen

Barra	N_a	V_a	M_a	N_b	V_b	M_b
1 (A–B)	−33	25	37.5	33	−25	37.5
2 (B–C)	−9	15	22.5	9	−15	22.5
3 (C–D)	15	−9	−22.5	−15	9	−22.5
4 (D–E)	9	15	22.5	−9	−15	22.5
5 (E–F)	33	25	37.5	−33	−25	37.5
6 (B–E)	10	−24	−60	−10	24	−60

(Fuerzas en kN, momentos en kN m, en ejes locales de cada barra.) **Solución = problema primario + problema complementario.** Los momentos de extremo de arriba son la suma de los dos estados, y lo mismo vale ley a ley:

$$\{M\}_{\text{final}} = \{M\}_p + \{M\}_c$$

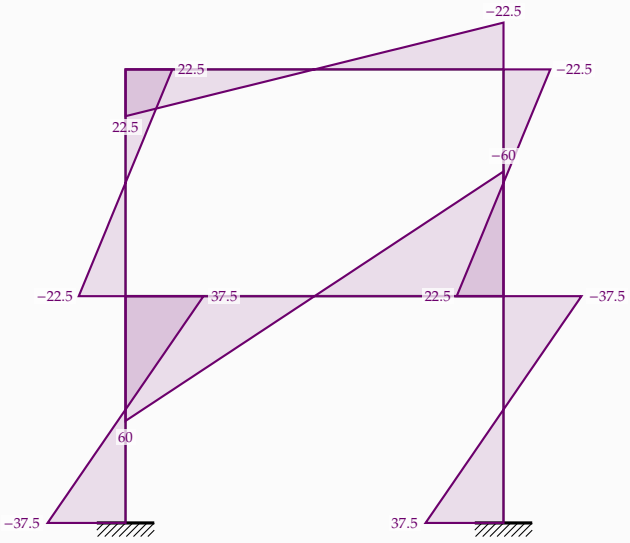


*Diagrama de momentos **final** de la estructura (en kN m), dibujado del lado de la tracción.*

Paso 8 Reacciones de la estructura

Con las fuerzas de extremo ya halladas, cada barra es un **cuerpo libre**: lo que entrega a cada uno de sus nudos está determinado, y las reacciones salen por pura estática. En cada nudo con apoyo se suman las fuerzas que le entregan las barras que llegan y se le resta la carga aplicada en él. Una fuerza de extremo (N, V) en ejes locales de una barra de ángulo θ aporta al nudo, en ejes globales,

$$F_x = N\cos\theta - V\sin\theta, \qquad F_y = N\sin\theta + V\cos\theta$$

y la reacción es la suma de las de todas las barras del nudo menos la carga aplicada en él: $R_x = \sum F_x - P_x$, $R_y = \sum F_y - P_y$, $R_M = \sum M - M_{\text{ap}}$.

Nudo A Concurren la barra 1 ($\theta = 90°$).

$$R_{Ax} = (-33) \cdot 0 - 25 \cdot 1 = \boxed{-25\ \text{kN}}$$

$$R_{Ay} = (-33) \cdot 1 + 25 \cdot 0 = \boxed{-33\ \text{kN}}$$

$$R_{AM} = 37.5 = \boxed{37.5\ \text{kN m}}$$

Nudo F Concurren la barra 5 ($\theta = -90°$).

$$R_{Fx} = (-33) \cdot 0 - (-25) \cdot (-1) = \boxed{-25\ \text{kN}}$$

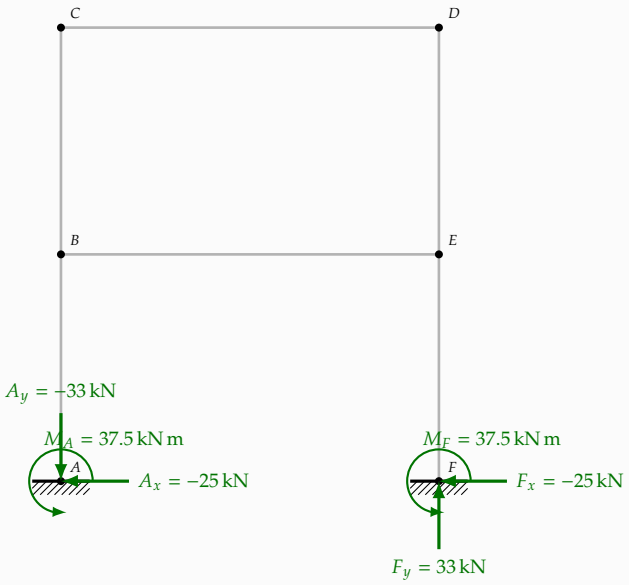
$$R_{Fy} = (-33) \cdot (-1) + (-25) \cdot 0 = \boxed{33\ \text{kN}}$$

$$R_{FM} = 37.5 = \boxed{37.5\ \text{kN m}}$$

Resumen de reacciones

Nudo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	$M.$ (kN m)
A	−25	−33	37.5
F	−25	33	37.5

Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.



Reacciones en los apoyos (kN y kN m).

Verificación del equilibrio

$$\sum F_x:\ -50 + (50) = 0 \approx 0, \qquad \sum F_y:\ 0 + (0) = 0 \approx 0$$

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

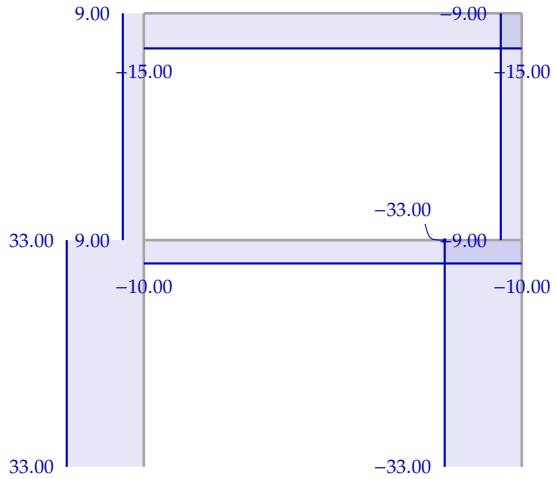


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.

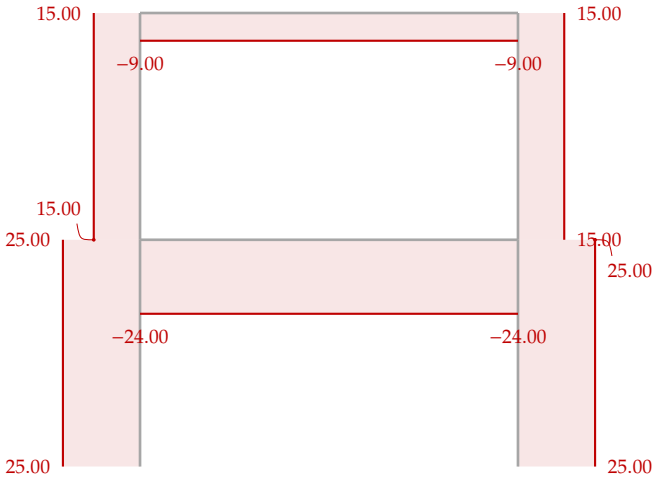


Diagrama de fuerza cortante (V), en kN.

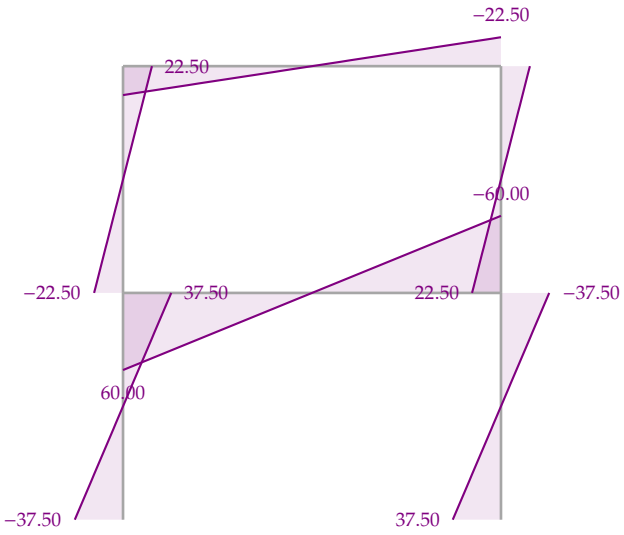
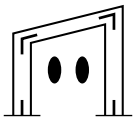


Diagrama de momento flector (M), en kN m.



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com