Método de rigidez directo

VIGA

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Modelo: viga continua, 2 GDL por nudo (v, θ). Las incógnitas son los **desplazamientos de los nudos** D. Lo que distingue a este camino del ensamblaje habitual es cómo se construye la matriz de rigidez: no se suman las matrices de barra una encima de otra, se levanta **columna a columna** preguntándole a la estructura, estado por estado:

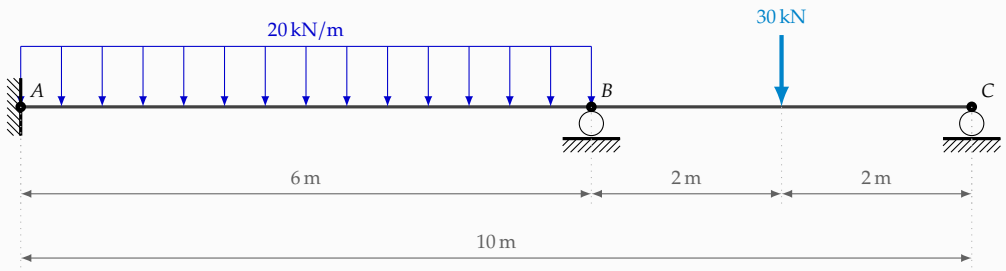
$$D_j = 1, \quad D_i = 0\ (i \neq j) \qquad \Longrightarrow \qquad k_{ij} = \text{fuerza en la coordenada } i \text{ que sostiene ese estado}$$

Con la matriz construida, el resto del camino es corto:

$$Q = Q_n - R, \qquad D = K^{-1}Q, \qquad \{M_F\} = \{M_e^0\} + [k_e]\{D\}$$

donde R son las **fuerzas de empotramiento perfecto** de las barras cargadas y M_e^0, las de cada barra en particular. Las reacciones se cierran al final por estática. Todas las barras entran con la misma rigidez de referencia, así que el desarrollo se lleva **en función de** EI: cada término de K sale como un múltiplo de EI y los desplazamientos, como C/EI.

Paso 1 Datos de la estructura



Geometría, apoyos y cargas de la estructura analizada.

Barra	Nudos	L (m)	E (kN/m^2)	I (m^4)	EI
1	A–B	6	$2 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^{-4}$	EI
2	B–C	4	$2 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^{-4}$	EI

Acción	Valor
Carga repartida A–B	$w = 20 \rightarrow 20$ kN/m
Carga puntual en B–C	$P = 30$ kN, $x = 2$ m

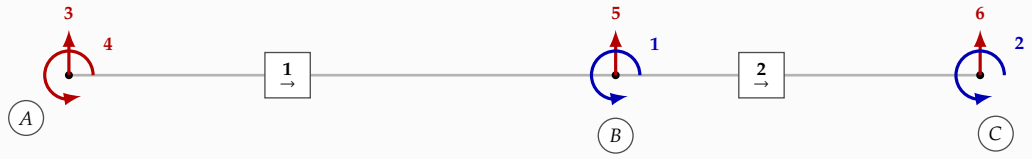
Clasificación estática

$$GH = 3m + r - 3n - h = 6 + 5 - 9 - 0 = \boxed{2} \quad \Rightarrow \quad \text{hiperestática g=2}$$

El grado de hiperestaticidad no cambia nada del camino: en rigidez las incógnitas son los desplazamientos, no las fuerzas, y su número es el de grados de libertad.

Paso 2 Grados de libertad

De los $2 \times 3 = 6$ desplazamientos de los nudos, los apoyos impiden 4 y quedan **2** libres: esas son las incógnitas D. Se numeran primero los **libres**, 1 a 2, y al final los **restringidos**, 3 a 6, de modo que las incógnitas quedan juntas en la cabecera del sistema.



Grados de libertad de la estructura: en azul los libres (las incógnitas D) y en rojo los restringidos por los apoyos.

Nudo	v	θ
A	3^*	4^*
B	5^*	1
C	6^*	2

(* = restringido por el apoyo: su desplazamiento es conocido y no es incógnita.)

Paso 3 Matrices de rigidez de los elementos

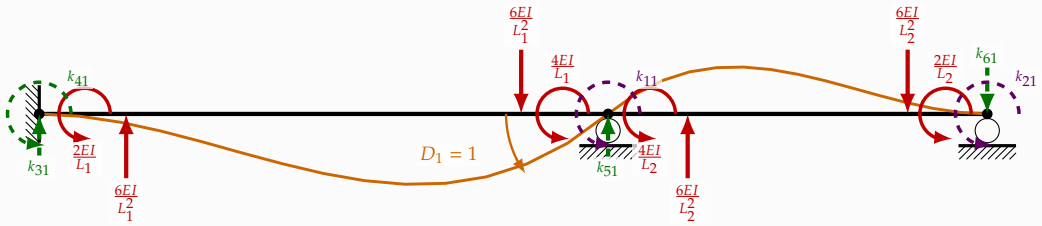
Elemento de viga, con los GDL ordenados (v_a, θ_a, v_b, θ_b):

$$k' = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

De cada barra lo que hace falta son sus **términos**: con ellos se contesta cada estado unitario de abajo sin necesidad de volver a escribir la matriz. Cada estado unitario se contesta con las fuerzas de extremo que la matriz de arriba ya tiene dentro: un **giro** unitario de un extremo

pide $4EI/L$ en ese extremo, $2EI/L$ en el otro y el par de cortantes $6EI/L^2$ que los equilibra; un **descenso** unitario de un extremo, $6EI/L^2$ en los dos extremos y los cortantes $12EI/L^3$; y un **alargamiento** unitario, EA/L en cada extremo. Con un extremo rotulado son los condensados de su barra.

3.1 Estado deformado $D_1 = 1$, $D_i = 0$ si $i \neq 1$: giro del nudo B



*Estado $D_1 = 1$ con los demás desplazamientos nulos. En negro la estructura original y en naranja la deformada. En **rojo**, las fuerzas de extremo que aparecen en cada barra deformada (los $4EI/L$, $6EI/L^2$... de la tabla); sumadas en cada nudo dan las **violetas**, que son las k_{i1} que hay que aplicar en los GDL libres para sostener el estado (la columna 1 de K), y en verde las que aparecen en los apoyos. Cada flecha va en el sentido en que de verdad actúa, así que su rótulo es el valor absoluto; el signo está en las cuentas de debajo.*

Equilibrando cada coordenada libre con lo que le entregan las barras que llegan a su nudo, sale la columna 1 de K:

$$k_{11} = M_b^{(1)} + M_a^{(2)} = \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} = \frac{4EI}{6} + \frac{4EI}{4} = 1.667EI$$

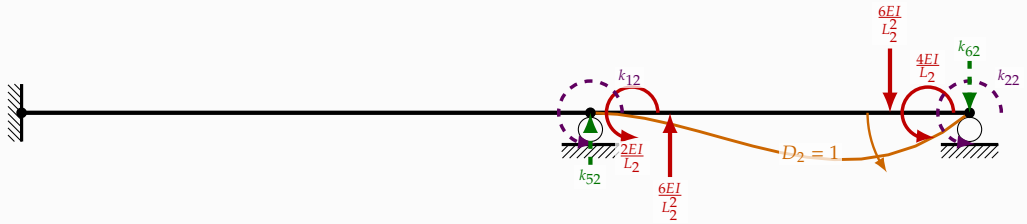
$$k_{21} = M_b^{(2)} = \frac{2EI}{L_2} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$K_{\cdot 1} = EI \begin{matrix} D_1 \\ \begin{bmatrix} 1.667 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Las reacciones de este estado (los GDL restringidos) no entran en el sistema, pero quedan anotadas:

$$k_{31} = 0.1667EI, \qquad k_{41} = 0.3333EI, \qquad k_{51} = 0.2083EI, \qquad k_{61} = -0.375EI$$

3.2 Estado deformado $D_2 = 1$, $D_i = 0$ si $i \neq 2$: giro del nudo C



*Estado $D_2 = 1$ con los demás desplazamientos nulos. En negro la estructura original y en naranja la deformada. En **rojo**, las fuerzas de extremo que aparecen en cada barra deformada (los $4EI/L$, $6EI/L^2$... de la tabla); sumadas en cada nudo dan las **violetas**, que son las k_{i2} que hay que aplicar en los GDL libres para sostener el estado (la columna 2 de K), y en verde las que aparecen en los apoyos. Cada flecha va en el sentido en que de verdad actúa, así que su rótulo es el valor absoluto; el signo está en las cuentas de debajo.*

La barra 1 no se deforma en este estado: no aporta ninguna fuerza. Equilibrando cada coordenada libre con lo que le entregan las barras que llegan a su nudo, sale la columna 2 de K:

$$k_{12} = M_a^{(2)} = \frac{2EI}{L_2} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$k_{22} = M_b^{(2)} = \frac{4EI}{L_2} = \frac{4EI}{4} = 1EI$$

$$K_{\cdot 2} = EI \begin{matrix} D_2 \\ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Las reacciones de este estado (los GDL restringidos) no entran en el sistema, pero quedan anotadas:

$$k_{52} = 0.375EI, \qquad k_{62} = -0.375EI$$

Matriz de rigidez K

Colocando cada columna en su sitio:

$$K = EI \begin{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.667 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

K sale **simétrica**, y no por casualidad: es el teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti, $k_{ij} = k_{ji}$. Es la comprobación más rápida de que las columnas están bien.

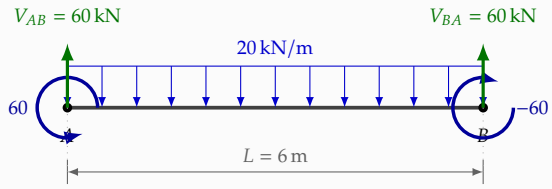
Paso 4 Vector de cargas Q

El sistema $K\,D = Q$ está escrito en los GDL de los nudos, así que Q solo puede llevar **fuerzas aplicadas en esos GDL**. Las cargas que actúan sobre el vano de una barra hay que trasladarlas antes, y eso se hace con las **fuerzas de empotramiento perfecto**: se bloquean todos los nudos, se calculan las fuerzas de extremo de cada barra cargada y se llevan a los nudos cambiadas de signo.

$$Q = Q_n - R \qquad \text{(otros libros: } P = P_n - \textstyle\sum F_E\text{)}$$

Q_n son las cargas aplicadas directamente en los nudos y R (o $\sum F_E$) las de empotramiento perfecto de las barras que llegan a cada uno.

4.1 Barra 1 (A–B)



Cuerpo libre de A–B biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $A \to B$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{AB} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(20)(6)^2}{12} = \mathbf{60}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{BA} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(20)(6)^2}{12} = \mathbf{-60}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $A \to B$).

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{wL}{2} = \frac{(20)(6)}{2} = \mathbf{60}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{AB} + V_{BA} = 60 + (60) = 120\ \text{kN}\ \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a B (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

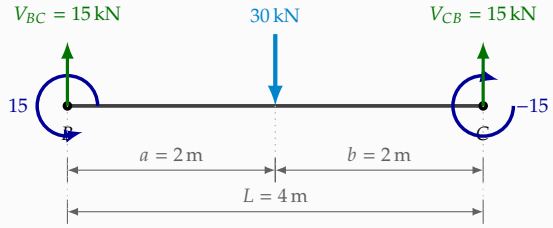
$$\text{MEP}_{AB} + \text{MEP}_{BA} + M_q = 60 + (-60) + (360) = 360$$

$$V_{AB} \cdot L = (60)(6) = 360 \checkmark$$

Las fuerzas de extremo de la barra empotrada, en ejes locales:

$$f_1^0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \\ -60 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_a \\ M_a \\ V_b \\ M_b \end{matrix}$$

4.2 Barra 2 (B–C)



Cuerpo libre de B–C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente perpendicular al eje: $P = 30$ kN; distancias a los extremos $a = 2$ y $b = L - a = 2$ m.

$$\text{MEP}_{BC} = +\frac{P\,a\,b^2}{L^2} = +\frac{(30)(2)(2)^2}{(4)^2} = \mathbf{15}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{CB} = -\frac{P\,a^2 b}{L^2} = -\frac{(30)(2)^2(2)}{(4)^2} = \mathbf{-15}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $B \to C$).

$$V_{BC} = \frac{P\,b^2(3a + b)}{L^3} = \frac{(30)(2)^2\big(3(2) + 2\big)}{(4)^3} = \mathbf{15}\ \text{kN}$$

$$V_{CB} = \frac{P\,a^2(a + 3b)}{L^3} = \frac{(30)(2)^2\big(2 + 3(2)\big)}{(4)^3} = \mathbf{15}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{BC} + V_{CB} = 15 + (15) = 30\ \text{kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a C (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{BC} + \text{MEP}_{CB} + M_q = 15 + (-15) + (60) = 60$$

$$V_{BC} \cdot L = (15)(4) = 60 \checkmark$$

Las fuerzas de extremo de la barra empotrada, en ejes locales:

$$f_2^0 = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} V_a \\ M_a \\ V_b \\ M_b \end{matrix}$$

Ensamblaje de Q

Coordenada a coordenada, con las fuerzas de extremo ya giradas a ejes globales:

$$Q_1 = 0 - (-60) - (15) = \boxed{45}$$

$$Q_2 = 0 - (-15) = \boxed{15}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 45 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$



Vector de cargas Q en los GDL libres (kN y kN m): la estructura cargada solo en sus nudos, equivalente a la de partida.

Paso 5 Cálculo de los desplazamientos

$$D = K^{-1} Q$$

Sobre la notación. Unos libros escriben $D = K^{-1}Q$ y otros $\mu = K^{-1}P$, con la letra griega μ para los desplazamientos y P para las cargas; también se ven $\{\Delta\}$ y $\{d\}$. Es la misma ecuación: cambia el nombre de los vectores, no lo que se calcula. Conviene recordar de dónde sale, porque es lo que ha permitido meter las cargas de vano en un sistema escrito solo con fuerzas de nudo:

$$\text{Solución} = \text{problema primario} + \text{problema complementario}$$

En el **primario** todos los nudos están bloqueados ($D = 0$) y actúan las cargas: de ahí salen las fuerzas de empotramiento perfecto R del apartado anterior, y para que nada se mueva hay que aplicar en cada coordenada una fuerza de fijación, que vale justo $-Q$. En el **complementario**

se devuelve esa fijación, es decir se aplica Q en los nudos, y los desplazamientos que produce son los de la estructura real. Sumados los dos, las cargas de vano quedan en el primario y los desplazamientos en el complementario. El sistema que hay que resolver:

$$EI \begin{bmatrix} 1.667 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Multiplicando por EI, las incógnitas pasan a ser los productos $EI\, D_i$, que son números limpios; el EI se devuelve al final.

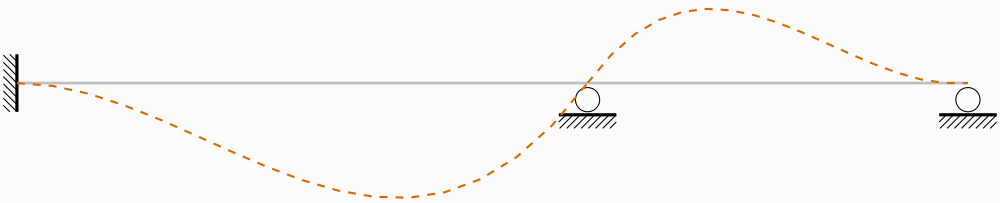
$$EI\, D = \begin{bmatrix} 26.47 \\ 1.765 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Deshaciendo el EI, cada desplazamiento con su valor:

$$\begin{aligned} D_1 = \theta_B &= \frac{26.47\ \text{kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{26.47\ \text{kN m}^2}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{26.47\ \text{kN m}^2}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= \boxed{0.001324\ \text{rad}}\ \curvearrowleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = \theta_C &= \frac{1.765\ \text{kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{1.765\ \text{kN m}^2}{(200\ \text{GPa})\,(1 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\ &= \frac{1.765\ \text{kN m}^2}{20000\ \text{kN m}^2} \\ &= \boxed{8.824 \cdot 10^{-5}\ \text{rad}}\ \curvearrowleft \end{aligned}$$

Nudo	v (mm)	θ (rad)
A	0	0
B	0	0.001324
C	0	$8.824 \cdot 10^{-5}$



Deformada (trazo naranja) amplificada ×1293.

Paso 6 Momentos finales de las barras

$$\{M_F\} = \{M_e^0\} + [k_e]\,\{D\}$$

Barra por barra: a sus fuerzas de empotramiento perfecto M_e^0 se les suma lo que producen los desplazamientos ya conocidos. $[k_e]$ es la matriz de la barra completa, con las filas y columnas de **todos** sus GDL, restringidos y no restringidos, y $\{D\}$ el movimiento de sus dos extremos, pasado a ejes locales.

6.1 Barra 1 (A–B)

Desplazamientos de sus extremos (ejes locales): $EI\,\theta_b = 26.47$, el resto nulos.

$$V_a = 60 + (0.1667)(26.47) = \boxed{64.41}$$

$$M_a = 60 + (0.3333)(26.47) = \boxed{68.82}$$

$$V_b = 60 + (-0.1667)(26.47) = \boxed{55.59}$$

$$M_b = -60 + (0.6667)(26.47) = \boxed{-42.35}$$

6.2 Barra 2 (B–C)

Desplazamientos de sus extremos (ejes locales): $EI\,\theta_a = 26.47$, $EI\,\theta_b = 1.765$, el resto nulos.

$$V_a = 15 + (0.375)(26.47) + (0.375)(1.765) = \boxed{25.59}$$

$$M_a = 15 + (1)(26.47) + (0.5)(1.765) = \boxed{42.35}$$

$$V_b = 15 + (-0.375)(26.47) + (-0.375)(1.765) = \boxed{4.412}$$

$$M_b = -15 + (0.5)(26.47) + (1)(1.765) = \boxed{0}$$

Resumen

Barra	V_a	M_a	V_b	M_b
1 (A–B)	64.41	68.82	55.59	−42.35
2 (B–C)	25.59	42.35	4.412	0

(Fuerzas en kN, momentos en kN m, en ejes locales de cada barra.)

Paso 7 Reacciones de la estructura

Con las fuerzas de extremo ya halladas, cada barra es un **cuerpo libre isostático**: lo que entrega a cada uno de sus nudos está determinado, y las reacciones salen por pura estática, sin volver a la rigidez. En cada nudo con apoyo se suman las fuerzas que le entregan las barras que llegan y se le resta la carga aplicada en él.

$$A_y = 64.41 = \boxed{64.41}$$

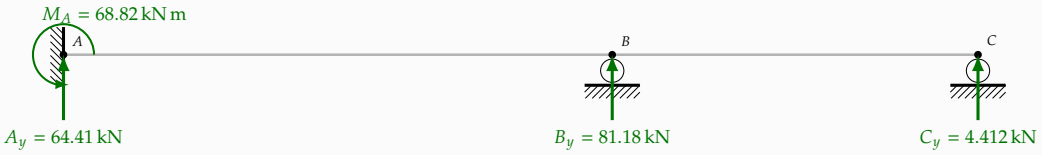
$$M_A = 68.82 = \boxed{68.82}$$

$$B_y = 55.59 + 25.59 = \boxed{81.18}$$

$$C_y = 4.412 = \boxed{4.412}$$

Nudo	$\cdot_y$ (kN)	$M.$ (kN m)
A	64.41	68.82
B	81.18	0
C	4.412	0

Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.



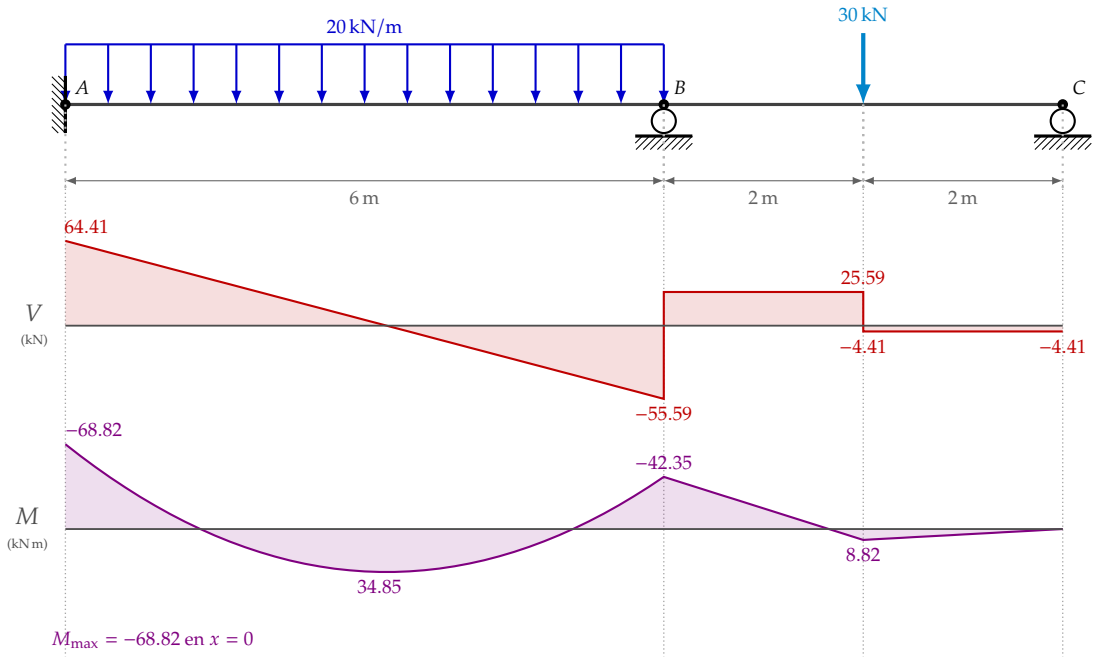
Reacciones en los apoyos (kN y kN m).

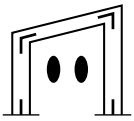
Verificación del equilibrio

$$\sum F_x : \; 0 + (0) = 0 \approx 0, \qquad \sum F_y : \; 150 + (-150) = 0 \approx 0$$

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M





Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com