Método de áreas (diagramas V, M)

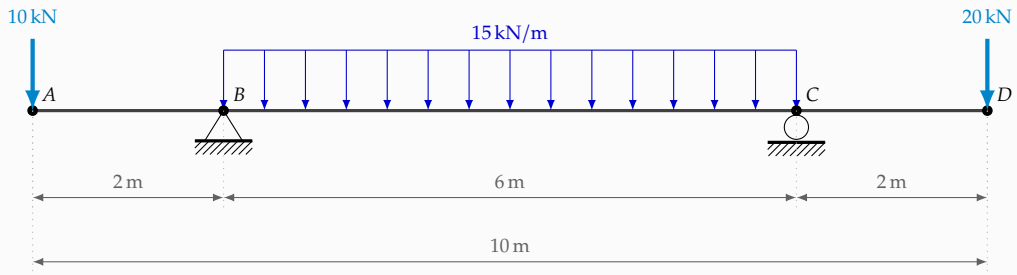
VIGA

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Viga **isostática**: las reacciones salen del equilibrio global y, a partir de ahí, los diagramas se construyen **sin escribir ninguna ley** $V(x)$ ni $M(x)$. Se usan las dos relaciones de la viga leídas como áreas: V baja el área de la carga repartida y salta en cada fuerza concentrada; M crece el área del diagrama de V. Todo es geometría, rectángulos, triángulos y trapecios, y los dos diagramas tienen que cerrar en cero al salir por el extremo derecho, que es la comprobación del método.

Paso 1 Datos y clasificación estática

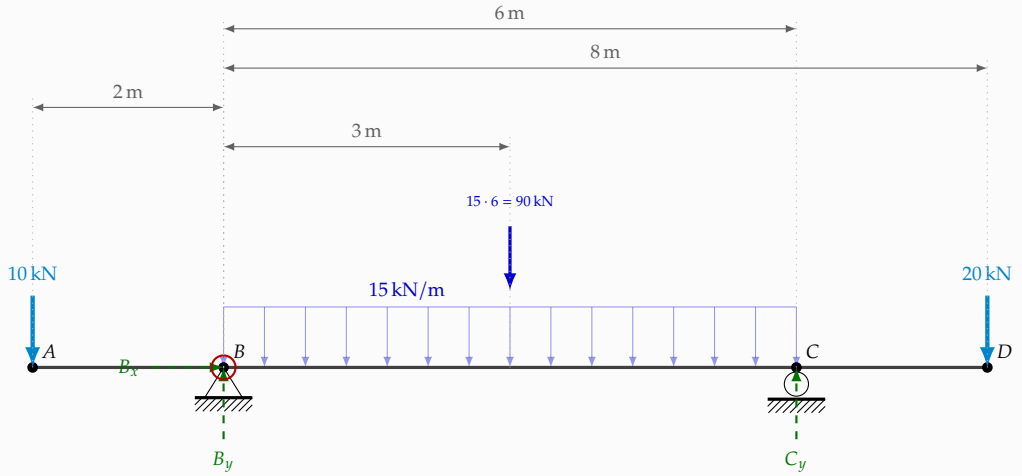


Geometría, apoyos y cargas de la viga analizada.

Con $m = 3$ barras, $r = 3$ reacciones, $n = 4$ nudos y $h = 0$ liberaciones (rótulas): $GH = 3m + r - 3n - h = 9 + 3 - 12 - 0 = 0 \Rightarrow$ **isostática**. El método de áreas es directamente aplicable.

Paso 2 Reacciones en los apoyos

Por ser isostática, el equilibrio global determina todas las reacciones. Este paso es idéntico al del método de cortes: el método de áreas solo cambia lo que viene después.



Cuerpo libre: las reacciones por calcular (a trazos), las cargas repartidas atenuadas y, encima, la resultante de cada una en su centroide, con su brazo hasta B, el punto donde se toman los momentos ($\sum M_B = 0$).

Con las cargas aplicadas y las reacciones como incógnitas, las sumatorias dan:

$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y + C_y - 10 - 20 - 90 = 0$$
$$\Rightarrow \quad B_y + C_y - 120 = 0 \quad \text{... (II)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,C_y + 20 - 160 - 270 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 6\,C_y - 410 = 0 \quad \text{... (III)}$$

Resolviendo (I), (II) y (III) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad B_x = \boxed{0\ \text{kN}}$$
$$\Rightarrow \quad B_y = \boxed{51.67\ \text{kN}}$$
$$\Rightarrow \quad C_y = \boxed{68.33\ \text{kN}}$$



Reacciones en los apoyos (kN, kN m).

Paso 3 Fuerza cortante, punto a punto

Los valores se escriben **sin unidades**: x en m, V en kN y M en kN m. Se recorre la viga de izquierda a derecha arrancando en $V = 0$, a la izquierda del extremo no hay nada que cortar, y se aplican dos reglas:

- Una **fuerza concentrada**, reacción o carga, hace **saltar** el cortante por su propio valor: hacia arriba si la fuerza sube, hacia abajo si baja. Por eso el diagrama se escribe con $V(x^-)$ y $V(x^+)$: en ese punto hay dos valores.
- Una **carga repartida** lo hace variar de forma continua, restándole el **área de carga** del tramo, $\Delta V = -\int w\,dx$. Con una uniforme esa área es $w \cdot \Delta x$ y el cortante baja en línea recta.

$$
\begin{aligned}
V(0^+) &= -10 = -10 \\
V(2^+) &= -10 + B_y = -10 + 51.67 = 41.67 \\
V(8^-) &= 41.67 - 15\,(6) = -48.33 \\
V(8^+) &= -48.33 + C_y = -48.33 + 68.33 = 20 \\
V(10^+) &= 20 - 20 = 0 \;\checkmark
\end{aligned}
$$

El diagrama **cierra en cero** al pasar el último apoyo: todo lo que sube iguala a todo lo que baja, que es el equilibrio vertical de la viga entera. Si no cerrase, el fallo estaría en las reacciones.

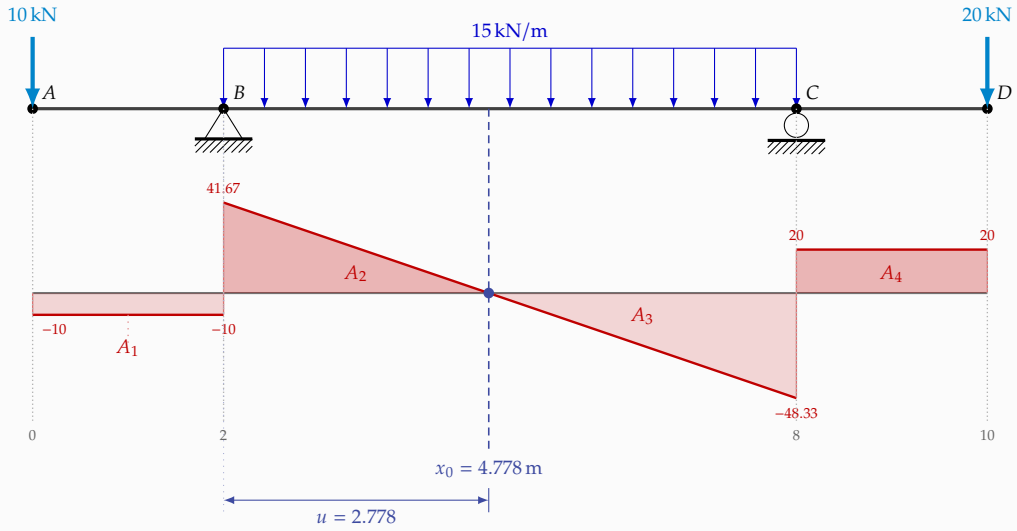


Diagrama de cortante construido punto a punto, con la viga encima para ver qué carga produce cada tramo. Cada pieza va sombreada y numerada $A_1, A_2, \ldots$: son las áreas con las que se levanta el momento en el paso siguiente. El punto marcado es donde V cruza el eje, que es donde el momento se hace máximo.

Paso 4 Momento flector por áreas del cortante

Como $V = dM/dx$, el momento entre dos puntos es el **área** del diagrama de cortante comprendida entre ellos: $M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx$. No hace falta escribir ninguna ley: basta medir las áreas de la figura anterior y **acumularlas**, empezando en $M = 0$ en el extremo izquierdo. Cada área cuenta con su signo, positiva donde V va por encima del eje, negativa donde va por debajo, y por eso el diagrama se parte justo donde V cambia de signo: ahí es donde M alcanza su máximo.

$$A_1 \text{ (rectángulo)} = (-10)(2) = -20 \qquad M(2) = 0 - 20 = -20$$

Dentro de $2 \le x \le 8$ el cortante cambia de signo: pasa de 41.67 a -48.33. Ahí $V = 0$ y por tanto $dM/dx = 0$: es el punto de **momento máximo**, y se localiza sobre el propio diagrama de cortante. Los dos triángulos que la recta del cortante forma con el eje son semejantes, así que la distancia u desde $x = 2$ sale de una proporción:

$$\frac{u}{41.67} = \frac{6-u}{48.33} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{41.67\,(6)}{41.67 + 48.33} = 2.778 \quad\Rightarrow\quad x_0 = 2 + 2.778 = 4.778$$

$$A_2 \text{ (triángulo)} = \tfrac{1}{2}(2.778)(41.67) = 57.87 \qquad M(4.778) = -20 + 57.87 = 37.87$$

$$A_3 \text{ (triángulo)} = \tfrac{1}{2}(3.222)(-48.33) = -77.87 \qquad M(8) = 37.87 - 77.87 = -40$$

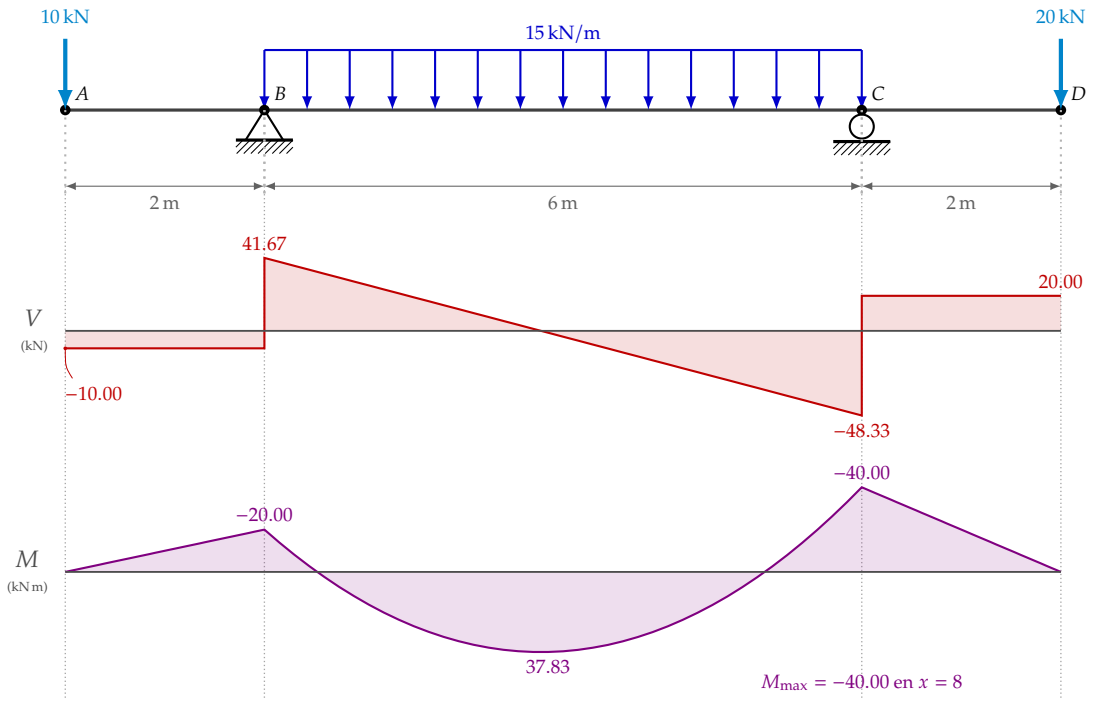
$$A_4 \text{ (rectángulo)} = (20)(2) = 40 \qquad M(10) = -40 + 40 = 0\ \checkmark$$

El momento también **cierra en cero** en el extremo derecho: más allá de la viga no queda nada que flectar. Las áreas positivas y las negativas del cortante se compensan exactamente, que es la segunda comprobación que trae el método.

$$M_{\max} = \boxed{-40 \text{ kN m}} \quad \text{en} \quad x = 8 \text{ m}$$

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com