Método matricial de rigidez

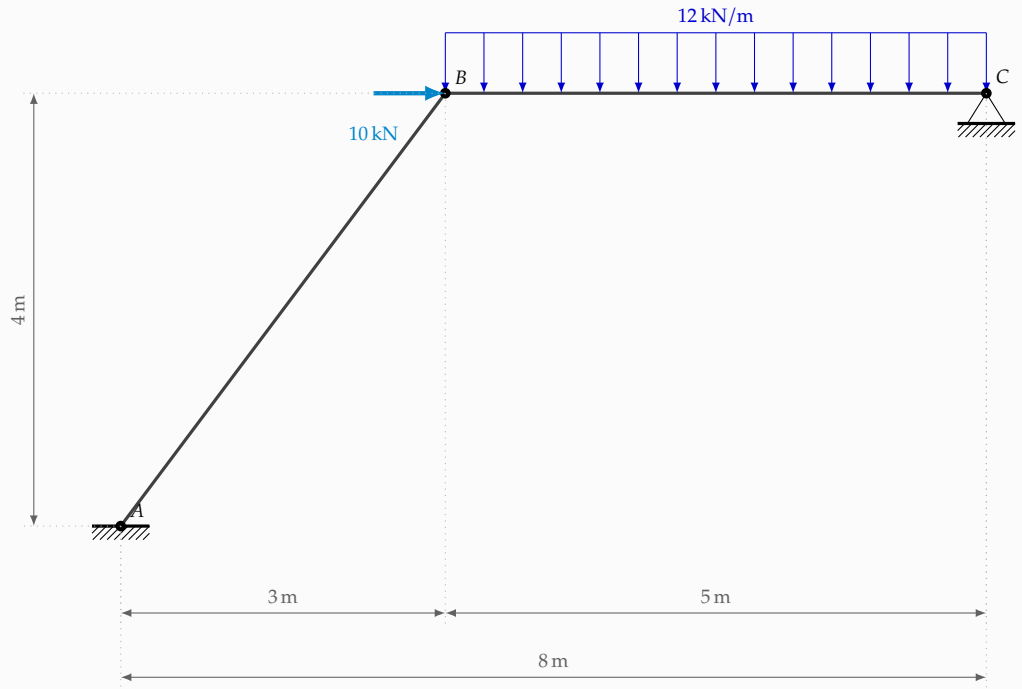
PÓRTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Modelo: pórtico plano, 3 GDL por nodo (u, v, θ).

Paso 1 Datos de la estructura



Geometría, apoyos y cargas de la estructura analizada.

Nodo	x (m)	y (m)	Apoyo	Cargas
A	0	0	Empotrado	—
B	3	4	—	P = 10 kN ∠0°
C	8	4	Fijo	—

Barra	Nodos	L (m)	θ (°)	E (kN/m^2)	A (m^2)	I (m^4)	w (kN/m)
1	A–B	5	53.13	$2 \cdot 10^8$	0.05	$1 \cdot 10^{-4}$	—
2	B–C	5	0	$2 \cdot 10^8$	0.05	$1 \cdot 10^{-4}$	12

Clasificación estática

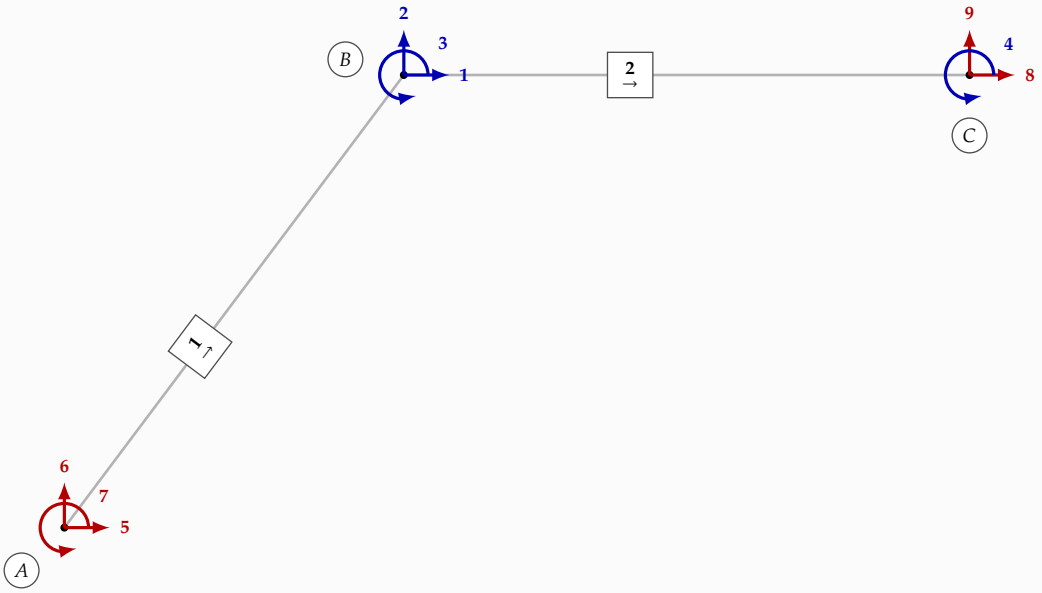
Con $m = 2$ barras, $r = 5$ reacciones, $n = 3$ nudos y $h = 0$ liberaciones (rótulas):

$$GH = 3m + r - 3n - h = 6 + 5 - 9 - 0 = \boxed{2} \quad \Rightarrow \quad \text{hiperestática g=2}$$

El método matricial de rigidez resuelve la hiperestaticidad de forma directa: las incógnitas son los desplazamientos nodales.

Paso 2 Grados de libertad

Cada nodo aporta 3 GDL. Se numeran primero los **libres**, 1 . . . 4, y al final los **restringidos**, 5 . . . 9, de modo que al reducir el sistema las incógnitas ya están juntas en la cabecera:



Numeración de los grados de libertad. En azul los GDL libres y en rojo los restringidos. El cuadrito sobre cada barra da su número y el sentido en que se recorre (de su nudo inicial al final); el circulito, el nombre del nudo.

Nodo	u	v	θ
A	5	6	7
B	1	2	3
C	8	9	4

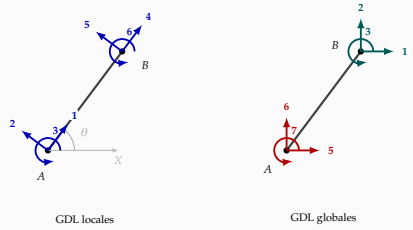
En las matrices que siguen, cada fila y cada columna lleva rotulado el número de su GDL (arriba y a la derecha en las matrices; solo a la derecha en los vectores), en azul si es libre y en rojo si está restringido.

Paso 3 Matrices de rigidez de los elementos

Elemento de pórtico en ejes locales (x' a lo largo de la barra) y su rotación a ejes globales:

$$k' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}, \qquad k = T^T\, k'\, T$$

Barra 1 (A–B)



Barra en su orientación real: GDL locales (x' a lo largo de la barra) y globales (X, Y), con el ángulo θ.

$L = 5$ m, $\theta = 53.13°$, $\cos\theta = 0.6$, $\sin\theta = 0.8$. Términos de la matriz local con los datos de la barra:

$$\frac{EA}{L} = \frac{(2\cdot 10^8)(0.05)}{5} = 2\cdot 10^6, \quad \frac{12EI}{L^3} = \frac{12(20000)}{5^3} = 1920$$

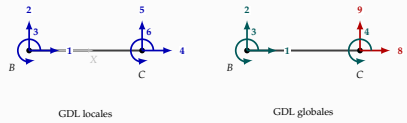
$$\frac{6EI}{L^2} = 4800, \quad \frac{4EI}{L} = 16000, \quad \frac{2EI}{L} = 8000$$

$$k'_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \color{red}{5} & \color{red}{6} & \color{red}{7} & \color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2\cdot 10^6 & 0 & 0 & -2\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1920 & 4800 & 0 & -1920 & 4800 \\ 0 & 4800 & 16000 & 0 & -4800 & 8000 \\ -2\cdot 10^6 & 0 & 0 & 2\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1920 & -4800 & 0 & 1920 & -4800 \\ 0 & 4800 & 8000 & 0 & -4800 & 16000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \color{red}{5} \\ \color{red}{6} \\ \color{red}{7} \\ \color{blue}{1} \\ \color{blue}{2} \\ \color{blue}{3} \end{matrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = T_1^T\, k_1'\, T_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 7.212\cdot 10^5 & 9.591\cdot 10^5 & -3840 & -7.212\cdot 10^5 & -9.591\cdot 10^5 & -3840 \\ 9.591\cdot 10^5 & 1.281\cdot 10^6 & 2880 & -9.591\cdot 10^5 & -1.281\cdot 10^6 & 2880 \\ -3840 & 2880 & 16000 & 3840 & -2880 & 8000 \\ -7.212\cdot 10^5 & -9.591\cdot 10^5 & 3840 & 7.212\cdot 10^5 & 9.591\cdot 10^5 & 3840 \\ -9.591\cdot 10^5 & -1.281\cdot 10^6 & -2880 & 9.591\cdot 10^5 & 1.281\cdot 10^6 & -2880 \\ -3840 & 2880 & 8000 & 3840 & -2880 & 16000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Barra 2 (B–C)



Barra en su orientación real: GDL locales (x' a lo largo de la barra) y globales (X, Y), con el ángulo θ.

$L = 5$ m, $\theta = 0°$, $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$. Términos de la matriz local con los datos de la barra:

$$\frac{EA}{L} = \frac{(2\cdot 10^8)(0.05)}{5} = 2\cdot 10^6, \quad \frac{12EI}{L^3} = \frac{12(20000)}{5^3} = 1920$$

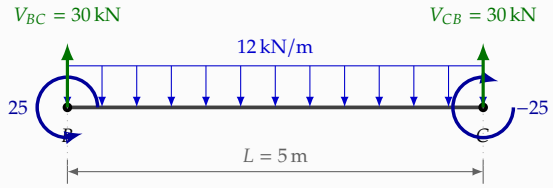
$$\frac{6EI}{L^2} = 4800, \quad \frac{4EI}{L} = 16000, \quad \frac{2EI}{L} = 8000$$

$$k_2' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2\cdot 10^6 & 0 & 0 & -2\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1920 & 4800 & 0 & -1920 & 4800 \\ 0 & 4800 & 16000 & 0 & -4800 & 8000 \\ -2\cdot 10^6 & 0 & 0 & 2\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1920 & -4800 & 0 & 1920 & -4800 \\ 0 & 4800 & 8000 & 0 & -4800 & 16000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{matrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = T_2^T\, k_2'\, T_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2\cdot 10^6 & 0 & 0 & -2\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1920 & 4800 & 0 & -1920 & 4800 \\ 0 & 4800 & 16000 & 0 & -4800 & 8000 \\ -2\cdot 10^6 & 0 & 0 & 2\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1920 & -4800 & 0 & 1920 & -4800 \\ 0 & 4800 & 8000 & 0 & -4800 & 16000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{matrix}$$

Cargas nodales equivalentes de las cargas de vano (empotramiento perfecto):



Cuerpo libre de B–C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $B \to C$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{BC} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(12)(5)^2}{12} = \mathbf{25}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(12)(5)^2}{12} = \mathbf{-25}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f_{eq}': la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $B \to C$).

$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{wL}{2} = \frac{(12)(5)}{2} = \mathbf{30}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{BC} + V_{CB} = 30 + (30) = 60\ \text{kN}\ \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a C (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{BC} + \text{MEP}_{CB} + M_q = 25 + (-25) + (150) = 150$$

$$V_{BC} \cdot L = (30)(5) = 150\ \checkmark$$

El vector recoge las acciones que la barra empotrada ejerce sobre los nudos: en las filas de giro aparece −MEP (signo opuesto al momento de extremo) y en las de traslación, las reacciones de empotramiento.

$$f'_{eq,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -25 \\ 0 \\ -30 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{matrix}, \qquad f_{eq,2} = T_2^T \, f'_{eq,2}$$

Paso 4 Ensamblaje del sistema global

Cada k_j se suma en las filas y columnas de los GDL de sus dos nodos; las cargas nodales y las f_{eq} forman F:

$$K = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 7.212 \cdot 10^5 & 9.591 \cdot 10^5 & -3840 & -7.212 \cdot 10^5 & -9.591 \cdot 10^5 & -3840 & 0 & 0 & 0 \\ 9.591 \cdot 10^5 & 1.281 \cdot 10^6 & 2880 & -9.591 \cdot 10^5 & -1.281 \cdot 10^6 & 2880 & 0 & 0 & 0 \\ -3840 & 2880 & 16000 & 3840 & -2880 & 8000 & 0 & 0 & 0 \\ -7.212 \cdot 10^5 & -9.591 \cdot 10^5 & 3840 & 2.721 \cdot 10^6 & 9.591 \cdot 10^5 & 3840 & -2 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -9.591 \cdot 10^5 & -1.281 \cdot 10^6 & -2880 & 9.591 \cdot 10^5 & 1.283 \cdot 10^6 & 1920 & 0 & -1920 & 4800 \\ -3840 & 2880 & 8000 & 3840 & 1920 & 32000 & 0 & -4800 & 8000 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 2 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1920 & -4800 & 0 & 1920 & -4800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4800 & 8000 & 0 & -4800 & 16000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{matrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ -30 \\ -25 \\ 0 \\ -30 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{matrix}$$

Paso 5 Condiciones de contorno

- Nodo A (empotrado): $u = v = \theta = 0$ (GDL 5–7).
- Nodo C (fijo/articulado): $u = v = 0$ (GDL 8, 9).

Paso 6 Resolución del sistema

Eliminando los GDL restringidos quedan libres los GDL 1, 2, 3, 4. El sistema reducido $K_{ff}\,U_f = F_f$:

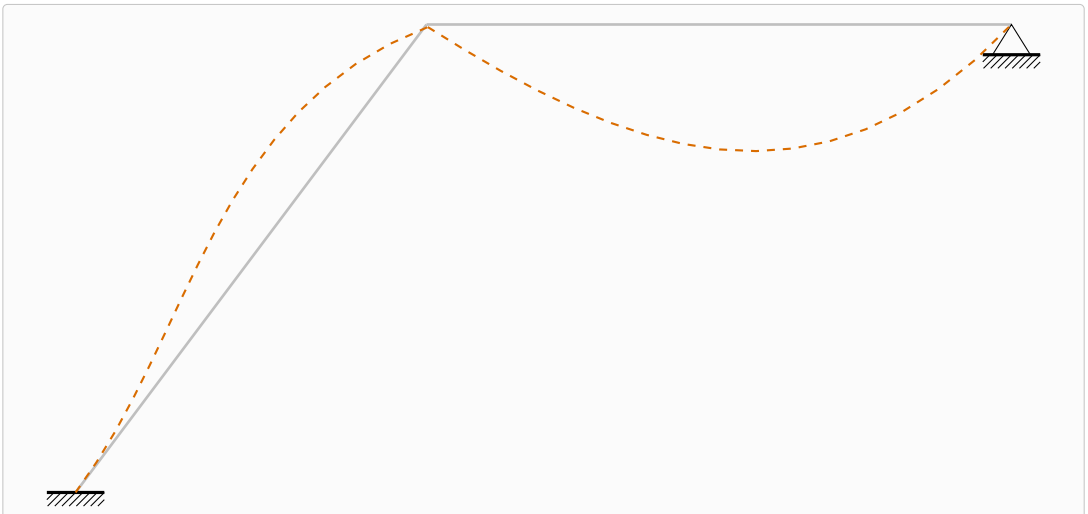
$$K_{ff} = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\!\!\begin{bmatrix} 2.721\cdot 10^{6} & 9.591\cdot 10^{5} & 3840 & 0 \\ 9.591\cdot 10^{5} & 1.283\cdot 10^{6} & 1920 & 4800 \\ 3840 & 1920 & 32000 & 8000 \\ 0 & 4800 & 8000 & 16000 \end{bmatrix}\!\!\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}, \qquad F_f = \begin{bmatrix} 10 \\ -30 \\ -25 \\ 25 \end{bmatrix}\!\!\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Resolviendo:

$$U_f = K_{ff}^{-1} F_f = \begin{bmatrix} 2.182\cdot 10^{-5} \\ -4.611\cdot 10^{-5} \\ -0.001343 \\ 0.002248 \end{bmatrix}$$

Paso 7 Desplazamientos nodales

Nodo	u (mm)	v (mm)	θ (rad)
A	0	0	0
B	0.02182	−0.04611	−0.001343
C	0	0	0.002248



Deformada (trazo naranja) amplificada ×728.8.

Paso 8 Reacciones en los apoyos

Con $R = KU - F$ evaluado en los GDL restringidos: Se evalúa fila a fila en los GDL restringidos, con los términos no nulos de KU (la fila g de K por el vector U completo) y el término de carga F_g:

$$A_x = \sum_j K_{5j}\,U_j - F_5 = (-7.212\cdot 10^5)(2.182\cdot 10^{-5}) + (-9.591\cdot 10^5)(-4.611\cdot 10^{-5}) + (-3840)(-0.001343) = \boxed{33.64}$$

$$A_y = \sum_j K_{6j}\,U_j - F_6 = (-9.591\cdot 10^5)(2.182\cdot 10^{-5}) + (-1.281\cdot 10^6)(-4.611\cdot 10^{-5}) + (2880)(-0.001343) = \boxed{34.25}$$

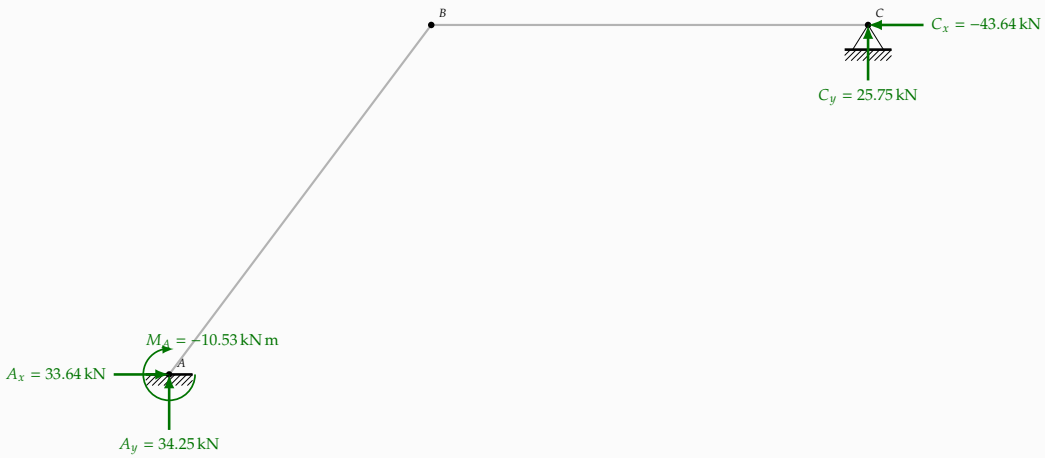
$$M_A = \sum_j K_{7j}\,U_j - F_7 = (3840)(2.182\cdot 10^{-5}) + (-2880)(-4.611\cdot 10^{-5}) + (8000)(-0.001343) = \boxed{-10.53}$$

$$C_x = \sum_j K_{8j}\,U_j - F_8 = (-2\cdot 10^6)(2.182\cdot 10^{-5}) = \boxed{-43.64}$$

$$C_y = \sum_j K_{9j}\,U_j - F_9 = (-1920)(-4.611\cdot 10^{-5}) + (-4800)(-0.001343) + (-4800)(0.002248) - (-30) = \boxed{25.75}$$

Nodo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	$M_\cdot$ (kN m)
A	33.64	34.25	−10.53
C	−43.64	25.75	0

Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.



Reacciones en los apoyos (kN y kN m).

Paso 9 Fuerzas en los extremos de barra

En ejes locales, $p' = k'\,(T\,u) - f'_{eq}$ (con k' condensada si hay rótula):

Barra	N_1	V_1	M_1	N_2	V_2	M_2
1 (A–B)	47.59	−6.36	−10.53	−47.59	6.36	−21.27
2 (B–C)	43.64	34.25	21.27	−43.64	25.75	0

(Fuerzas en kN, momentos en kN m, en los ejes locales de cada barra.)

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

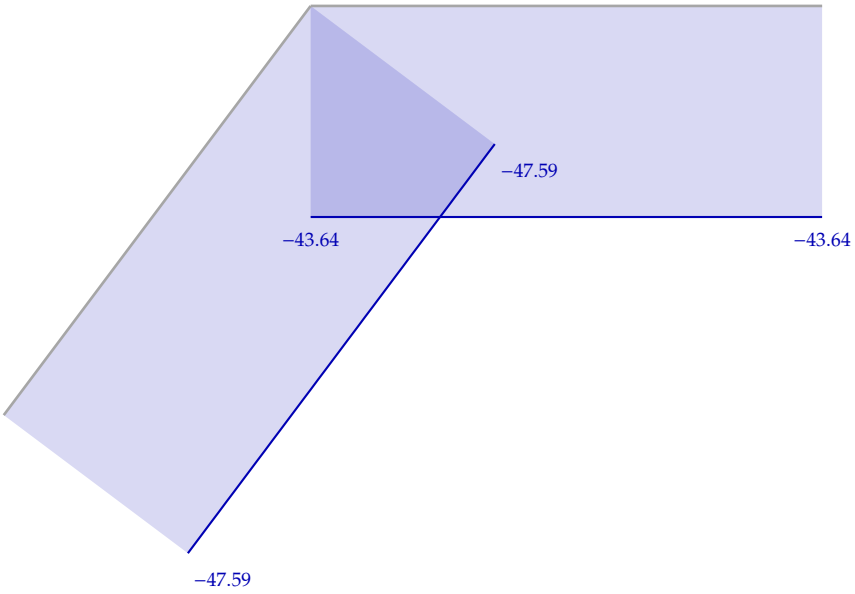


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.

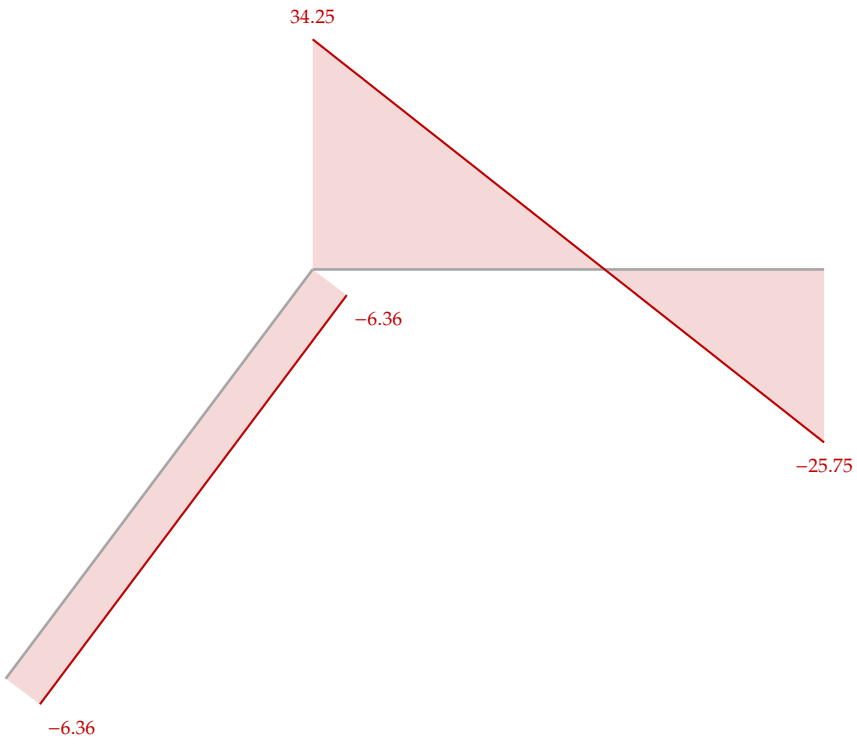


Diagrama de fuerza cortante (V), en kN.

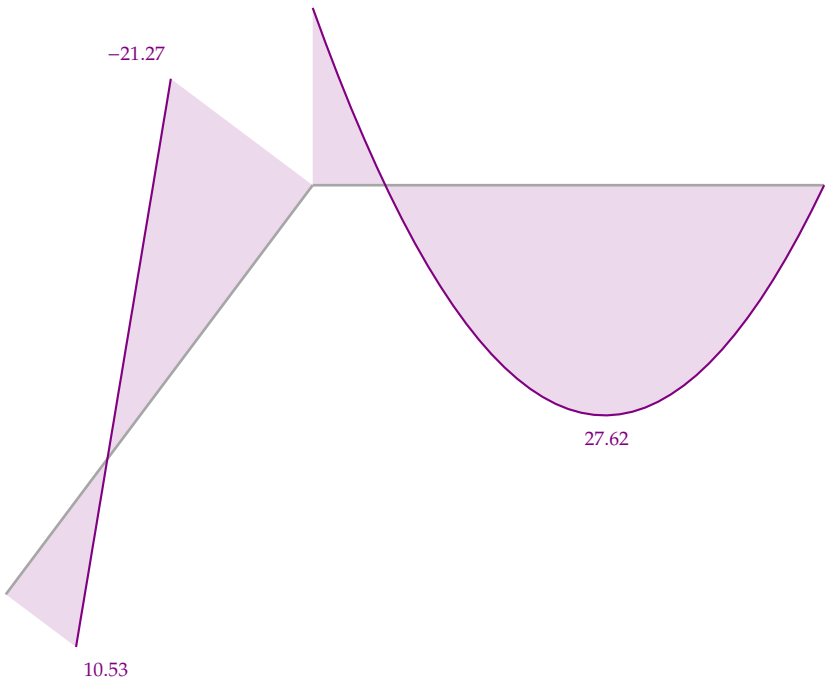


Diagrama de momento flector (M), en kN m.