Método de las Flexibilidades (método de las fuerzas)

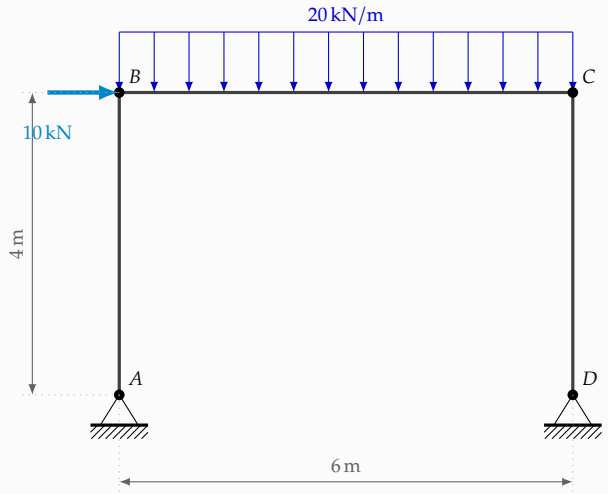
PÓRTICO HIPERESTÁTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Formulación matricial del método de las fuerzas, considerando la flexibilidad por flexión:

$$\{\delta_0\} + [F]\{X\} = \{0\}, \qquad \delta_{j0} = \sum_{barras} \int \frac{M_0\, m_j}{EI}\, dx, \qquad f_{ji} = \sum_{barras} \int \frac{m_i\, m_j}{EI}\, dx$$



Estructura analizada.

Paso 1 Clasificación y redundantes

Componentes de reacción: A_x, A_y, D_x, D_y (4) frente a 3 ecuaciones de equilibrio:

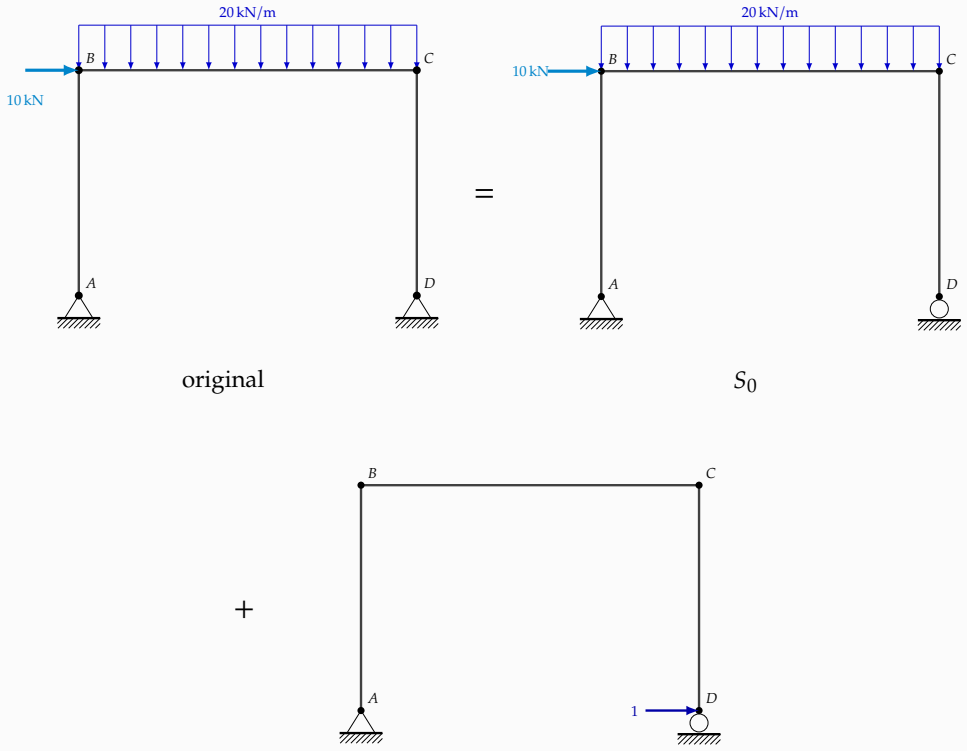
$$\text{GE} = 4 - 3 = 1$$

$$g = \text{GE} = 1 = \boxed{1} \quad \Rightarrow \quad \text{hiperestática de grado 1}$$

$$X_1 = D_x$$

Redundantes (selección del usuario); la primaria conserva A_x, A_y, D_y.

estructura original $= M_0 + X_1\, m_1$



original S_0

$S_1\ (X_1 = 1)$

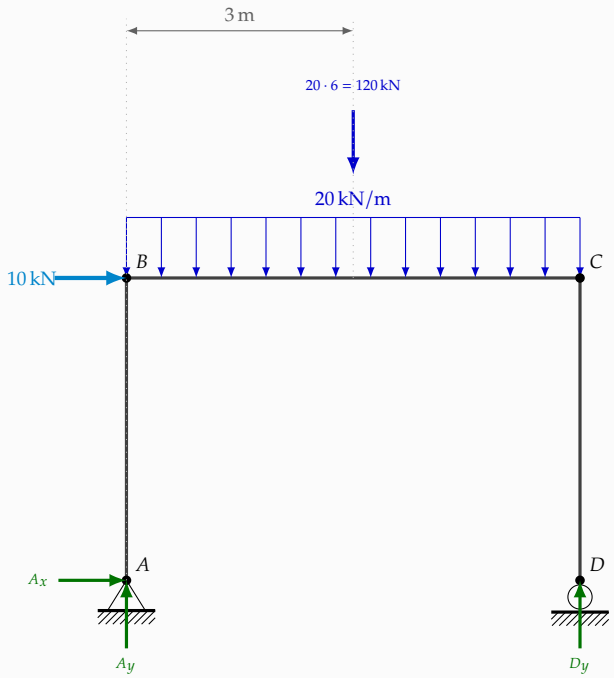
Principio de superposición.

La estructura original equivale al sistema S_0, la primaria con las cargas reales, más un sistema por cada redundante, cada uno con su acción unitaria. Los 2 sistemas se resuelven por separado en las secciones siguientes; las redundantes X_i son justo los factores que hacen que su suma reproduzca la original.

Cada sumando es una estructura ISOSTÁTICA, que ya se sabe resolver: por linealidad basta con hallarlos por separado y volver a sumarlos. Lo único que falta son los factores X_i, y de eso se ocupan las condiciones de compatibilidad del final.

Paso 2 Sistema isostático equivalente S_0

Liberadas las 1 ligaduras redundantes, lo que queda es una estructura **isostática** cargada con las acciones reales *y* con las redundantes X_i como cargas exteriores todavía desconocidas. Ese es el sistema equivalente: mientras las X_i valgan lo que valían en la original, las dos estructuras son la misma.



Sistema S_0: la primaria con las cargas reales; las redundantes X_i no hace falta dibujarlas aquí, cada una aparece como carga unitaria en su propio sistema S_i, más abajo.

A partir de aquí se resuelven uno a uno los 2 estados en los que se separa: el de las cargas reales (M_0) y uno por redundante con $X_i = 1$ (m_i). **Reacciones de la primaria.** La primaria es isostática, así que sus 3 incógnita(s) A_x, A_y, D_y salen del equilibrio con las cargas de este caso:

$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + 10 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + D_y - 120 = 0 \quad \text{... (II)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,D_y - 10\,(4) - 120\,(3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad 6\,D_y - 400 = 0 \quad \text{... (III)}$$

Resolviendo (I), (II) y (III) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad A_x = \boxed{-10 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad A_y = \boxed{53.33 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad D_y = \boxed{66.67 \text{ kN}}$$

Ley de momentos. Cortando cada barra a una distancia x de su nudo inicial y planteando el equilibrio del trozo retenido, M_0 sale tramo a tramo:
Tramo AB ($0 \leq x \leq 4$):

$$M_{0,AB}(x) = 10x$$

Tramo CB $(0 \leq x \leq 6)$:

$$\begin{aligned} M_{0,CB}(x) &= 66.67\,x - 20\,x\,\frac{x}{2} \\ &= -10x^2 + 66.67x \end{aligned}$$

Tramo DC $(0 \leq x \leq 4)$:

$$M_{0,DC}(x) = 0$$

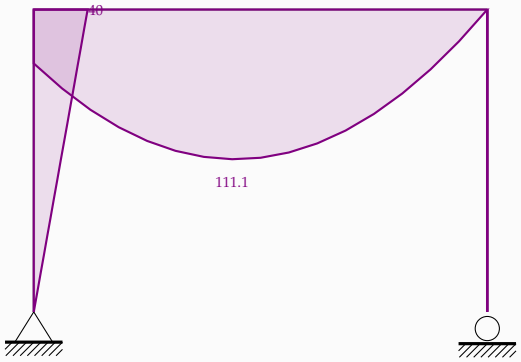
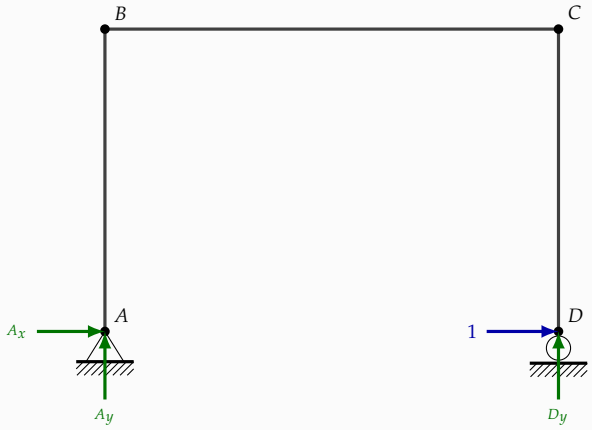


Diagrama M_0 (cargas reales sobre la primaria), el de la ley que se acaba de obtener.

Paso 3 Sistemas primarios $X_i = 1$

Caso $X_1 = 1$



Sistema m_1: la primaria con solo *la acción unitaria $X_1 = 1$; las cargas reales no intervienen.*

Reacciones de la primaria. La primaria es isostática, así que sus 3 incógnita(s) A_x, A_y, D_y salen del equilibrio con la acción unitaria de este caso:

$$(\rightarrow +)\ \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + 1 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + D_y = 0 \quad \text{... (II)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,D_y = 0 \quad \text{... (III)}$$

Resolviendo (I), (II) y (III) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad A_x = \boxed{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A_y = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \quad D_y = \boxed{0}$$

Ley de momentos. Cortando cada barra a una distancia x de su nudo inicial y planteando el equilibrio del trozo retenido, m_1 sale tramo a tramo:
Tramo AB $(0 \le x \le 4)$:

$$m_{1,AB}(x) = x$$

Tramo CB $(0 \le x \le 6)$:

$$m_{1,CB}(x) = 4$$

Tramo DC $(0 \le x \le 4)$:

$$m_{1,DC}(x) = x$$

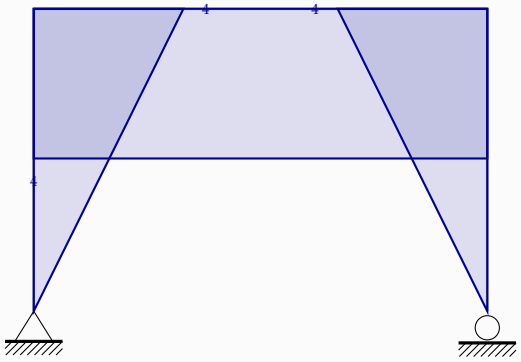


Diagrama m_1.

Paso 4 Matriz de flexibilidad y término de cargas

$$\begin{aligned}
\delta_{10} &= \sum \int \frac{M_0\, m_1}{EI}\, dx \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^4 (10x)\,(x)\, dx + \frac{1}{EI}\int_0^6 \left(-10x^2 + 66.67x\right)(4)\, dx \\
&= \frac{213.3}{EI} + \frac{1920}{EI} \\
&= \frac{2133\ \text{kN}\,\text{m}^3}{EI} \\
&= \frac{2133\ \text{kN}\,\text{m}^3}{(200\ \text{GPa})\,(1\cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\
&= \frac{2133\ \text{kN}\,\text{m}^3}{20000\ \text{kN}\,\text{m}^2} \\
&= 0.1067\ \text{m}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \sum \int \frac{m_1\, m_1}{EI}\, dx \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^4 (x)\,(x)\, dx + \frac{1}{EI}\int_0^6 (4)\,(4)\, dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 (x)\,(x)\, dx \\
&= \frac{21.33}{EI} + \frac{96}{EI} + \frac{21.33}{EI} \\
&= \frac{138.7\ \text{m}^3}{EI} \\
&= \frac{138.7\ \text{m}^3}{(200\ \text{GPa})\,(1\cdot 10^{-4}\ \text{m}^4)} \\
&= \frac{138.7\ \text{m}^3}{20000\ \text{kN m}^2} \\
&= 0.006933\ \text{m/kN}
\end{aligned}
$$

Paso 5 Resolución del sistema

La condición de compatibilidad pide que el desplazamiento en cada redundante liberada sea nulo, $\delta_j = \delta_{j0} + \sum_i f_{ji}\, X_i = 0$; el sistema de flexibilidad que se plantea es:

$$\boxed{f_{11}\, X_1 = -\delta_{10}}$$

Sustituyendo los valores ya calculados:

$$\left[0.006933\right]\left\{X_1\right\} = \left[-0.1067\right]$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{f_{11}} = -\frac{\dfrac{2133\ \text{kN m}^3}{EI}}{\dfrac{138.7\ \text{m}^3}{EI}} = -\frac{2133\ \text{kN m}^3}{138.7\ \text{m}^3} = \boxed{-15.38\ \text{kN}}$$

Paso 6 Cálculo de las demás reacciones

Las incógnitas que conservaba la primaria se recomponen superponiendo los casos ya resueltos: la del sistema M_0 más la de cada caso unitario multiplicada por su redundante.

$$
\begin{aligned}
A_x &= -10 - X_1 \\
&= -10 + (-1)(-15.38) \\
&= \boxed{5.385\ \text{kN}} \\
A_y &= \boxed{53.33\ \text{kN}} \\
D_y &= \boxed{66.67\ \text{kN}} \\
D_x &= X_1 = \boxed{-15.38\ \text{kN}}
\end{aligned}
$$

Nota: el método desprecia las deformaciones axial y por cortante; la pequeña diferencia respecto al matricial (que incluye la axial) proviene de ahí.

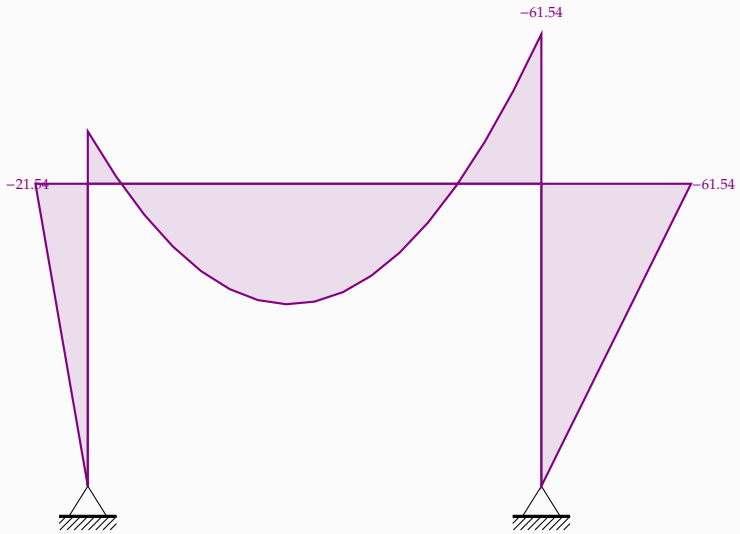


Diagrama de momentos final $M = M_0 + \sum X_i m_i$.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

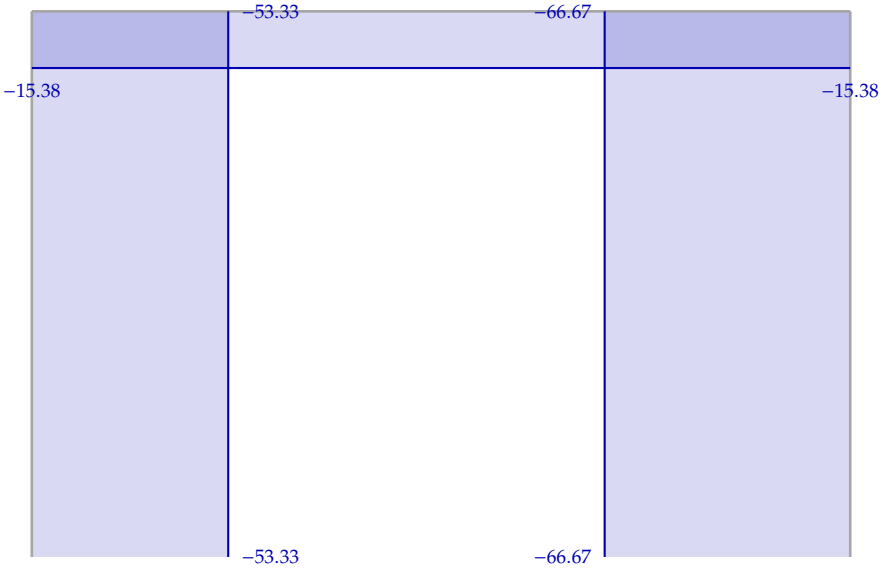


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.

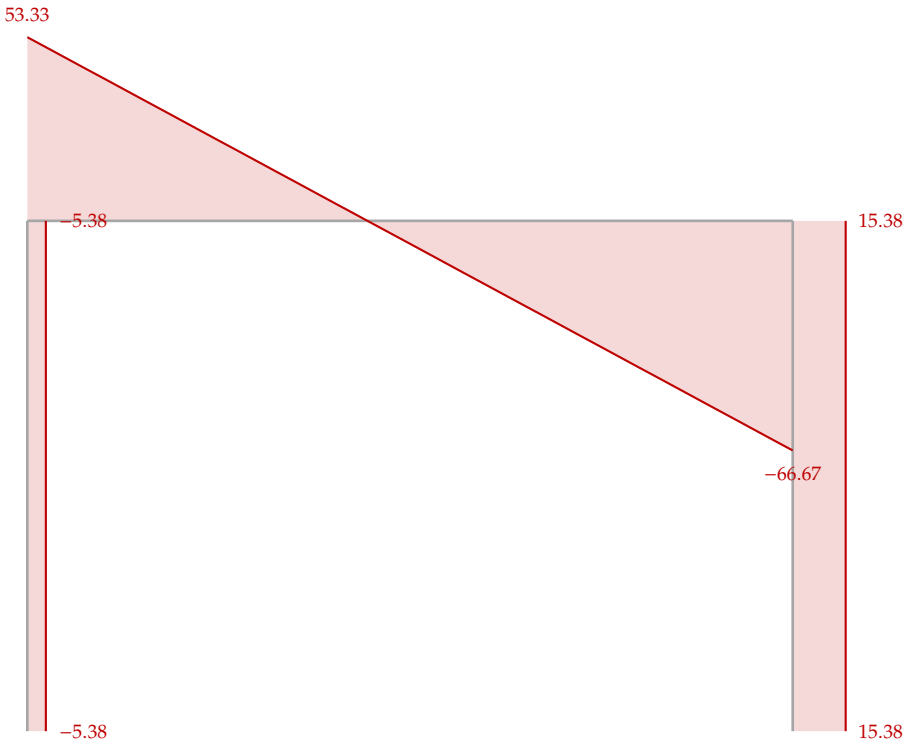


Diagrama de fuerza cortante (V), en kN.

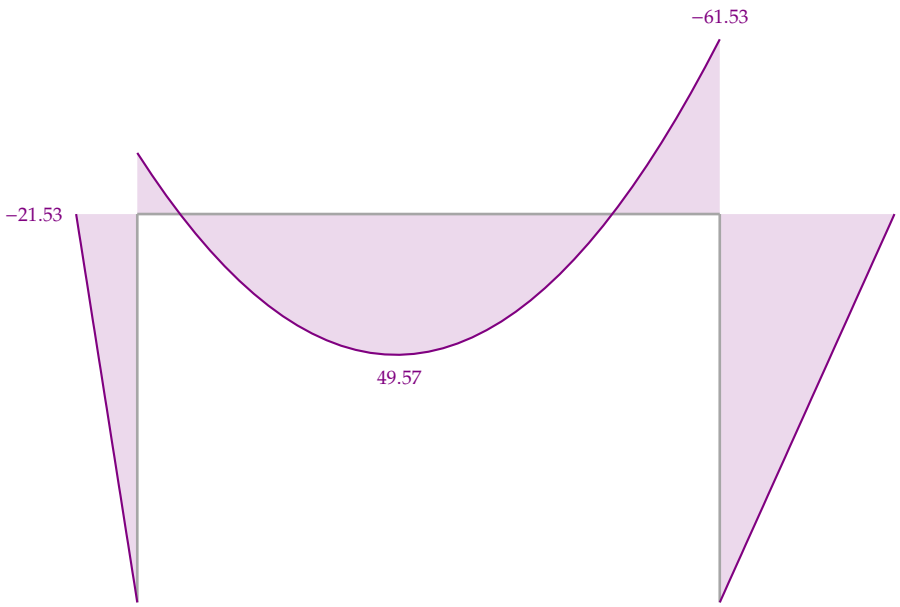


Diagrama de momento flector (M), en kN m.