Método de la Doble Integración

VIGA HIPERESTÁTICA

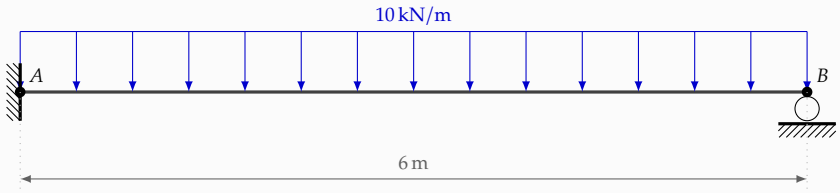
EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Ecuación diferencial de la elástica e integraciones sucesivas (x desde el extremo izquierdo, flecha y positiva hacia arriba):

$$EI\,y''(x) = M(x) \;\Rightarrow\; EI\,\theta(x) = \int M\,dx + C_1 \;\Rightarrow\; EI\,y(x) = \iint M\,dx\,dx + C_1 x + C_2$$

Con $EI = 20000$ kN m^2 constante.



Viga analizada.

Paso 1 Clasificación estática

Componentes de reacción a flexión: A_y, M_A, B_y (3) frente a 2 ecuaciones de equilibrio ($\sum F_y$, $\sum M$):

$$g = 3 - 2 = \boxed{1} \quad \Rightarrow \quad \text{hiperestática de grado 1}$$

Paso 2 Redundante(s) elegida(s)

$$X_1 = M_A$$

Se elige(n) (selección del usuario). No se construye una estructura primaria: las reacciones se dejan *en función de la(s) redundante(s)* y ésta(s) se determina(n) al final junto con las constantes de integración usando las condiciones de contorno.

Paso 3 Reacciones en función de la(s) redundante(s)

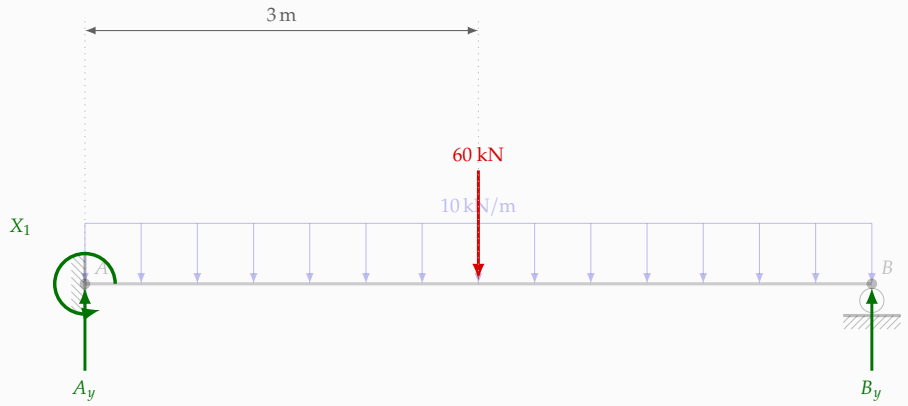


Diagrama de cuerpo libre (DCL), incluidas las redundantes X_i.

Tomando las redundantes $X_1 = M_A$ como incógnitas, las demás reacciones se obtienen por equilibrio global. La redundante se trata como una acción más: entra en las sumatorias con su símbolo, y las reacciones quedan en función de ella. **Reducción de las cargas.** Cada acción exterior se lleva a su resultante y su punto de aplicación:

- Repartida uniforme $w = 10$ kN/m entre $x = 0$ y $x = 6 \Rightarrow$ resultante $W = 60$ kN aplicada en $\bar{x} = 3$ m.

Ecuaciones de equilibrio. Con 3 componente(s) de reacción incógnita(s) (A_y, B_y, X_1) se plantean 2 ecuación(es), con el convenio de signos delante:

$$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y - 60 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,B_y + X_1 - 180 = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad A_y = \boxed{30 + 0.1667 X_1 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad B_y = \boxed{30 - 0.1667 X_1 \text{ kN}}$$

Comprobación: el término independiente de cada expresión es la reacción del caso de *cargas reales* sobre la primaria, y el coeficiente de X_i es la reacción del caso de *carga unitaria* $X_i = 1$ (superposición).

Reacción	Cargas reales	$X_1 = 1$
A_y	30	0.1667
B_y	30	−0.1667

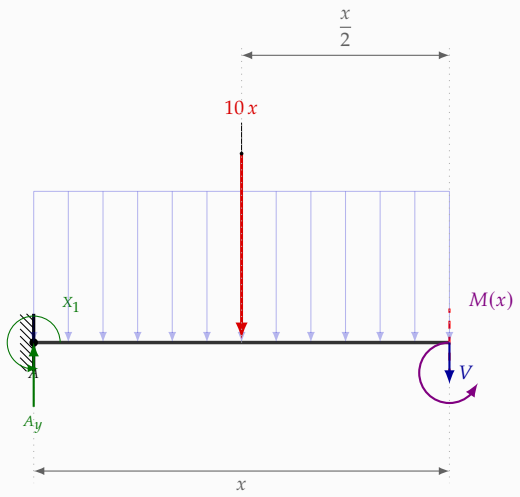
La redundante $X_1 = M_A$ queda como incógnita (se determinará junto con C_1, C_2 en las condiciones de contorno).

Paso 4 Momento, giro y flecha por tramos (método de cortes, lado izquierda)

En cada tramo se corta la viga y, por equilibrio de la porción de la izquierda, se obtiene $M(x)$ (función de la(s) redundante(s)). Se integra dos veces con *su propio* par de constantes:

$$EI\,\theta(x) = \int M\,dx + C_i, \qquad EI\,y(x) = \iint M\,dx\,dx + C_i\,x + C_{i+1}$$

Tramo I (A–B) $(0 \le x \le 6)$



Cuerpo libre de la izquierda del corte en el tramo A–B; x acotada desde el extremo izquierda.

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{I}}(x) &= 30\,x - 10\,x\,\frac{x}{2} + X_1\,(0.1667x - 1) \\ &= -5x^2 + 30x + X_1\,(0.1667x - 1) \end{aligned}$$

$$EI\,\theta_{\mathrm{I}}(x) = -1.667x^3 + 15x^2 + X_1\,(0.08333x^2 - x) + C_1$$

$$EI\,y_{\mathrm{I}}(x) = -0.4167x^4 + 5x^3 + X_1\,(0.02778x^3 - 0.5x^2) + C_1\,x + C_2$$

Paso 5 Condiciones de contorno y continuidad

Los apoyos imponen $y = 0$ (y $\theta = 0$ en empotramientos); entre tramos consecutivos, θ e y deben ser continuos. Resultan 3 ecuación(es) para las 3 incógnita(s) C_1, C_2, X_1. Cada una se escribe sustituyendo la abscisa en la ecuación del tramo correspondiente y agrupando después los coeficientes de cada incógnita (en azul, la ecuación que se lleva al sistema):
$EI\,y_{\mathrm{I}}(0) = 0$: apoyo A:

$$\Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$EI\,\theta_{\mathrm{I}}(0) = 0$: empotramiento A:

$$\Rightarrow \; C_1 = 0$$

$EI\, y_{\mathrm{I}}(6) = 0$: apoyo B:

$$\Rightarrow \; 540 - 12\,X_1 + 6\,C_1 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \; -12\,X_1 + 6\,C_1 + C_2 = -540$$

Paso 6 Resolución del sistema

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtienen todas las constantes y la(s) redundante(s):

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad X_1 = 45$$

La(s) redundante(s):

$$\boxed{M_A = 45 \text{ kN m}}$$

Se sustituye(n) en las expresiones de las reacciones (paso 3) y en $M(x)$ de cada tramo.

Paso 7 Cálculo de las demás reacciones

El sistema ha dado la redundante $X_1 = M_A = 45$. Las demás reacciones quedaron escritas *en función* de ella al plantear el equilibrio global, así que ahora basta sustituir:

$$\begin{aligned} A_y &= 30 + 0.1667 X_1 \\ &= 30 + (0.1667)(45) \\ &= \boxed{37.5 \text{ kN}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_y &= 30 - 0.1667 X_1 \\ &= 30 + (-0.1667)(45) \\ &= \boxed{22.5 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Y la redundante ya es la propia incógnita del sistema:

$$M_A = \boxed{45 \text{ kN m}}$$

Flecha máxima

La flecha es máxima donde la tangente a la elástica es **horizontal**: allí $y'(x) = \theta(x) = 0$ y la flecha deja de crecer. Se buscan por tanto los ceros del giro, y se comparan con los extremos de la viga (en un voladizo la flecha puede ser máxima en la punta sin que el giro se anule). El giro se anula dentro del tramo I ($0 \le x \le 6$). Igualando a cero su ecuación de giro:

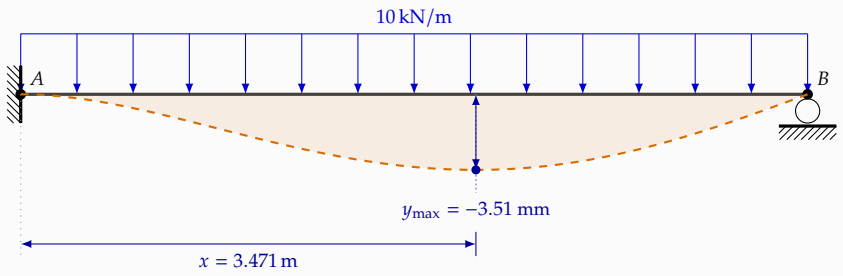
$$EI\, \theta_{\mathrm{I}}(x) = -1.667x^3 + 18.75x^2 - 45x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 3.471 \text{ m}}$$

Se sustituye esa abscisa en la ecuación de la *flecha* de ese mismo tramo:

$$\begin{aligned} EI\, y_{\mathrm{I}}(3.471) &= -0.4167(3.471)^4 + 6.25(3.471)^3 - 22.5(3.471)^2 \\ &= -70.19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{-70.19\ \mathrm{kN\,m^3}}{EI} \\ &= \frac{-70.19\ \mathrm{kN\,m^3}}{(200\ \mathrm{GPa})\,(1\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^4})} \\ &= \frac{-70.19\ \mathrm{kN\,m^3}}{20000\ \mathrm{kN\,m^2}} \\ &= -0.00351\ \mathrm{m} = \boxed{-3.51\ \mathrm{mm}}\ \downarrow \end{aligned}$$

Un resultado positivo significaría que el movimiento va en el sentido de la acción unitaria aplicada; aquí sale negativo, así que el punto de flecha máxima **se mueve hacia abajo**.



La viga y su curva elástica superpuesta (escala vertical exagerada): la flecha se mide desde la posición inicial de la viga, y vale $|y|_{\max} = 3.51$ mm en $x = 3.471$ m.

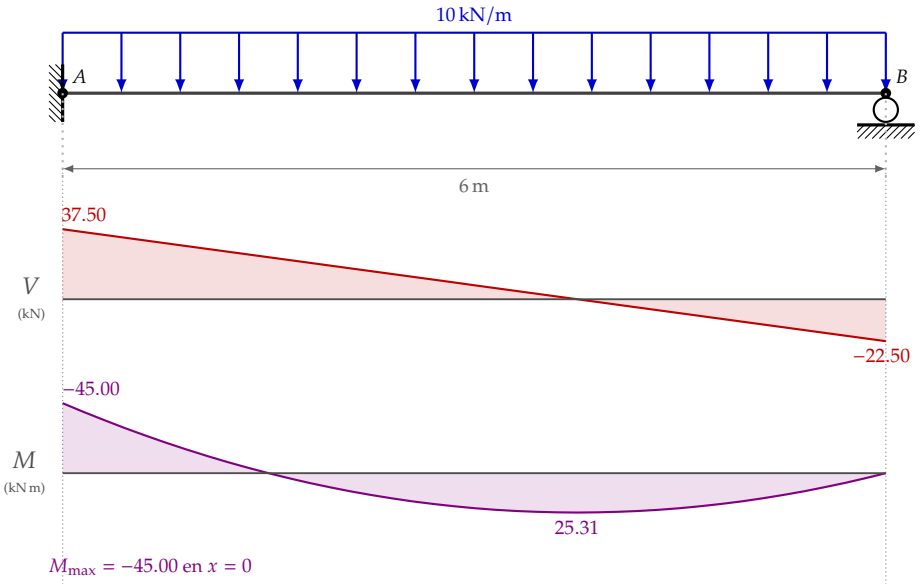
Giros en los nudos

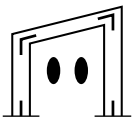
Contrastados uno a uno con los que da el método matricial de rigidez:

Nodo	θ Doble Int. (rad)	θ Matricial	Δ
A	0 ↶	0	0
B	0.00225 ↶	0.00225	0

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M





Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com