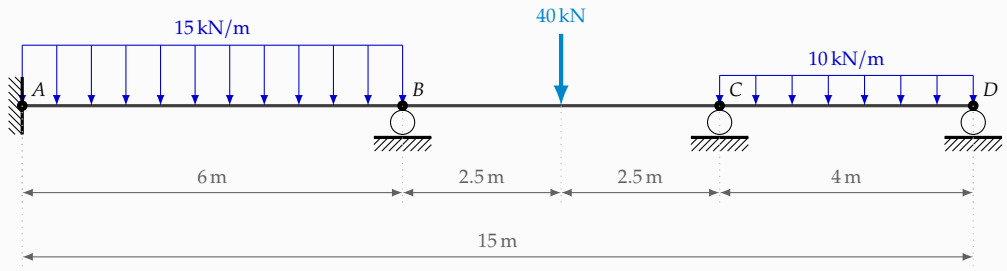
Método de Hardy Cross (distribución de momentos)

VIGA CONTINUA

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Convención de momentos de extremo: antihorario positivo (la misma del método matricial).



Viga continua analizada.

Paso 1 Rigideces relativas y factores de distribución (FD)

$$k = \begin{cases} 4EI/L & \text{extremo lejano continuo o empotrado} \\ 3EI/L & \text{extremo lejano articulado (apoyo simple)} \end{cases} \qquad FD_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

EI es constante en todas las barras, así que las rigideces se dejan en función de EI sin sustituir su valor: en $FD = k/\sum k$ aparece arriba y abajo y se simplifica. **Nudo A** — apoyo empotrado: absorbe momento y no distribuye.

$$FD_{AB} = 0$$

Nudo B — nudo giratorio (distribuye).

$$k_{BA} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{6} = 0.6667EI$$

$$k_{BC} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{5} = 0.8EI$$

$$\sum k = 0.6667EI + 0.8EI = 1.467EI$$

$$FD_{BA} = \frac{k_{BA}}{\sum k} = \frac{0.6667EI}{1.467EI} = \boxed{0.4545}$$

$$FD_{BC} = \frac{k_{BC}}{\sum k} = \frac{0.8EI}{1.467EI} = \boxed{0.5455}$$

Nudo C — nudo giratorio (distribuye).

$$k_{CB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{5} = 0.8EI$$

$$k_{CD} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{4} = 0.75EI$$

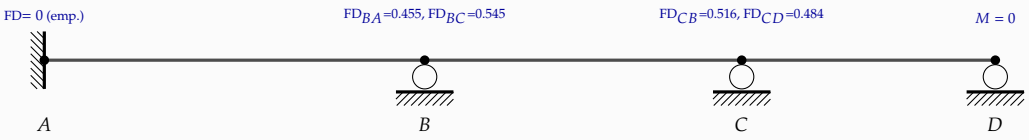
$$\sum k = 0.8EI + 0.75EI = 1.55EI$$

$$FD_{CB} = \frac{k_{CB}}{\sum k} = \frac{0.8EI}{1.55EI} = \boxed{0.5161}$$

$$FD_{CD} = \frac{k_{CD}}{\sum k} = \frac{0.75EI}{1.55EI} = \boxed{0.4839}$$

Nudo D — apoyo simple extremo: $M_D = 0$ en todo momento. Se usa rigidez modificada en los tramos adyacentes:

$$k_{DC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{4} = 0.75EI$$

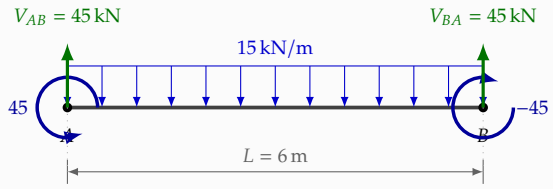


Factores de distribución en cada nudo.

Paso 2 Momentos de empotramiento perfecto (MEP)

Cada tramo se aísla y se supone biempotrado bajo su carga. Convención antihoraria positiva.

Tramo A–B



Cuerpo libre de A–B biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $A \to B$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{AB} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(15)(6)^2}{12} = \mathbf{45}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{BA} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(15)(6)^2}{12} = -\mathbf{45}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $A \to B$).

$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{wL}{2} = \frac{(15)(6)}{2} = \mathbf{45}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

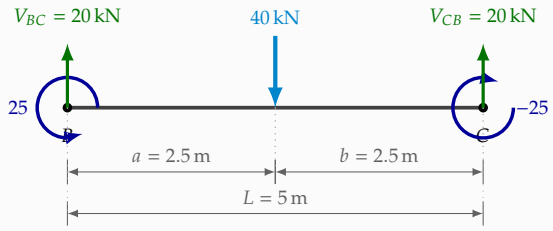
$$V_{AB} + V_{BA} = 45 + (45) = 90\ \text{kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a B (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{AB} + \text{MEP}_{BA} + M_q = 45 + (-45) + (270) = 270$$

$$V_{AB} \cdot L = (45)(6) = 270 \checkmark$$

Tramo B–C



Cuerpo libre de B–C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente perpendicular al eje: $P = 40$ kN; distancias a los extremos $a = 2.5$ y $b = L - a = 2.5$ m.

$$\text{MEP}_{BC} = +\frac{P\,a\,b^2}{L^2} = +\frac{(40)(2.5)(2.5)^2}{(5)^2} = \mathbf{25}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{CB} = -\frac{P\,a^2 b}{L^2} = -\frac{(40)(2.5)^2(2.5)}{(5)^2} = \mathbf{-25}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $B \to C$).

$$V_{BC} = \frac{P\,b^2(3a + b)}{L^3} = \frac{(40)(2.5)^2\big(3(2.5) + 2.5\big)}{(5)^3} = \mathbf{20}\ \text{kN}$$

$$V_{CB} = \frac{P\,a^2(a + 3b)}{L^3} = \frac{(40)(2.5)^2\big(2.5 + 3(2.5)\big)}{(5)^3} = \mathbf{20}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

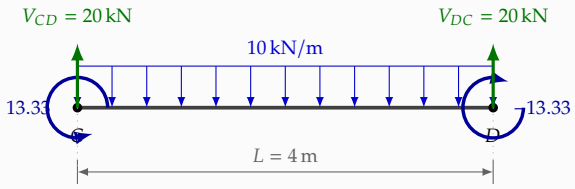
$$V_{BC} + V_{CB} = 20 + (20) = 40\ \text{kN}\ \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a C (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{BC} + \text{MEP}_{CB} + M_q = 25 + (-25) + (100) = 100$$

$$V_{BC} \cdot L = (20)(5) = 100\ \checkmark$$

Tramo C–D



Cuerpo libre de C–D biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $C \to D$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{CD} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(10)(4)^2}{12} = \mathbf{13.33}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{DC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(10)(4)^2}{12} = \mathbf{-13.33}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $C \to D$).

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{wL}{2} = \frac{(10)(4)}{2} = \mathbf{20}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{CD} + V_{DC} = 20 + (20) = 40\ \text{kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a D (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{CD} + \text{MEP}_{DC} + M_q = 13.33 + (-13.33) + (80) = 80$$

$$V_{CD} \cdot L = (20)(4) = 80 \checkmark$$

MEP modificado (extremos pre-liberados)

En un apoyo simple extremo, o en una rótula, el momento es nulo de forma permanente. En vez de arrastrar ese cero por toda la tabla equilibrándolo una y otra vez, se libera de entrada y se transporta la mitad al extremo opuesto:

$$\text{MEP}^* = \text{MEP} - \tfrac{1}{2}\,\text{MEP}_{\text{extremo liberado}}$$

$$\text{MEP}^*_{CD} = 13.33 - \tfrac{1}{2}(-13.33) = \boxed{20\ \text{kN m}}, \qquad \text{MEP}^*_{DC} = 0$$

Paso 3 Tabla de distribución de momentos

Momento desequilibrado inicial en cada nudo giratorio ($\sum M_{extremos} - M_{aplicado}$):

$$\Delta M_B = -45 + 25 = -20\ \text{kN m} \ \Rightarrow\ \text{se reparte } -\Delta M_B \cdot FD \text{ y se transporta } 1/2$$

$$\Delta M_C = -25 + 20 = -5\ \text{kN m} \ \Rightarrow\ \text{se reparte } -\Delta M_C \cdot FD \text{ y se transporta } 1/2$$

Iteración simultánea: todos los nudos en cada ciclo

Convergencia en 10 ciclo(s); en cada ciclo se equilibran todos los nudos giratorios a la vez y se transporta la mitad al extremo opuesto.

	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}	M_{CD}	M_{DC}
FD	(0)	0.455	0.545	0.516	0.484	—
MEP*	45	−45	25	−25	20	0
Dist. 1		9.091	10.91	2.581	2.419	
Transp. 1	4.545		1.29	5.455		
Dist. 2		−0.5865	−0.7038	−2.815	−2.639	
Transp. 2	−0.2933		−1.408	−0.3519		
Dist. 3		0.6398	0.7678	0.1816	0.1703	
Transp. 3	0.3199		0.09081	0.3839		
Dist. 4		−0.04128	−0.04954	−0.1981	−0.1858	
Transp. 4	−0.02064		−0.09907	−0.02477		
Dist. 5		0.04503	0.05404	0.01278	0.01198	
Transp. 5	0.02252		0.006392	0.02702		
Dist. 6		−0.002905	−0.003486	−0.01395	−0.01307	
Transp. 6	−0.001453		−0.006973	−0.001743		
Dist. 7		0.003169	0.003803	$8.997 \cdot 10^{-4}$	$8.435 \cdot 10^{-4}$	
Transp. 7	0.001585		$4.499 \cdot 10^{-4}$	0.001902		
Dist. 8		$-2.045 \cdot 10^{-4}$	$-2.454 \cdot 10^{-4}$	$-9.815 \cdot 10^{-4}$	$-9.202 \cdot 10^{-4}$	
Transp. 8	$-1.022 \cdot 10^{-4}$		$-4.907 \cdot 10^{-4}$	$-1.227 \cdot 10^{-4}$		
Dist. 9		$2.231 \cdot 10^{-4}$	$2.677 \cdot 10^{-4}$	$6.332 \cdot 10^{-5}$	$5.936 \cdot 10^{-5}$	
Transp. 9	$1.115 \cdot 10^{-4}$		$3.166 \cdot 10^{-5}$	$1.338 \cdot 10^{-4}$		
Dist. 10		$-1.439 \cdot 10^{-5}$	$-1.727 \cdot 10^{-5}$	$-6.908 \cdot 10^{-5}$	$-6.476 \cdot 10^{-5}$	
Transp. 10	$-7.196 \cdot 10^{-6}$		$-3.454 \cdot 10^{-5}$	$-8.635 \cdot 10^{-6}$		
$\sum$	49.57	−35.85	35.85	−19.76	19.76	0

Iteración condensada: equilibrio nudo a nudo

Es el *mismo* Hardy Cross, la suma final es idéntica, pero organizado como se hace a mano: en vez de dedicar un bloque de columnas a cada ciclo de *distribuir→transportar*, cada **fila** es un único nudo equilibrado junto con su transporte, y el nudo siguiente ya parte de lo que acaba de llegarle.

- **El extremo articulado se libera en un solo paso.** La barra que llega allí (DC en D) usa la rigidez modificada $3EI/L$, de modo que el transporte *de vuelta* hacia ese nudo es nulo: basta anular el momento una vez, fila *Lib.*, que transporta la mitad al extremo opuesto, y queda equilibrado para siempre, sin volver a iterar. Es el mismo MEP* con el que arranca la tabla anterior, solo que aquí se ve como un paso más.

- **Los empotramientos no devuelven nada.** A tiene $FD = 0$: todo lo que le llega se queda ahí y nunca lo redistribuye. Por eso el *rebote* solo ocurre entre B y C.
- **Una fila por nudo equilibrado.** Cada fila es *lo que acaba de llegar* $\cdot FD$ y su transporte, *resultado* $\div 2$; los términos decrecen en progresión geométrica (aquí cada rebote los reduce a ≈ 0.07 veces el anterior), así que la tabla se corta en cuanto son despreciables para la precisión de ingeniería.

	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}	M_{CD}	M_{DC}
FD	(0)	0.455	0.545	0.516	0.484	—
MEP	45	−45	25	−25	13.33	−13.33
Lib. D					6.667	13.33
Nudo B (1)	4.545	9.091	10.91	5.455		
Nudo C (1)			−0.1173	−0.2346	−0.2199	
Nudo B (2)	0.02666	0.05332	0.06398	0.03199		
Nudo C (2)			−0.008256	−0.01651	−0.01548	
Nudo B (3)	0.001876	0.003753	0.004503	0.002252		
Nudo C (3)			$-5.811 \cdot 10^{-4}$	−0.001162	−0.001089	
Nudo B (4)	$1.321 \cdot 10^{-4}$	$2.641 \cdot 10^{-4}$	$3.169 \cdot 10^{-4}$	$1.585 \cdot 10^{-4}$		
Nudo C (4)			$-4.09 \cdot 10^{-5}$	$-8.179 \cdot 10^{-5}$	$-7.668 \cdot 10^{-5}$	
$\sum$	49.57	−35.85	35.85	−19.76	19.76	0

Se han omitido 6 filas más, despreciables, la mayor de ellas vale $2.2 \cdot 10^{-5}$ kN m; la fila $\sum$ sí recoge la convergencia completa. Sumando cada columna se llega a los mismos momentos finales que en la tabla simultánea (diferencia máxima $1.873 \cdot 10^{-5}$ kN m): no es otro método, es la misma suma hecha en otro orden.

Paso 4 Cálculo de momentos finales

El momento final de cada extremo es su columna de la tabla sumada: el MEP modificado de partida más todos los repartos y transportes que ha recibido.

Fórmula:

$$\hat{M}_{ij} = \text{MEP}^{*}_{ij} + \sum(\text{repartos} + \text{transportes})$$

Cálculo: **Tramo AB**

$$\hat{M}_{AB} = \underbrace{45}_{\text{MEP}^{*}} + \underbrace{0}_{\sum \text{repartos}} + \underbrace{4.574}_{\sum \text{transportes}}$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{AB} = 49.57 \text{ kN m}}$$

$$\hat{M}_{BA} = \underbrace{(-45)}_{\text{MEP}^{*}} + \underbrace{9.148}_{\sum \text{repartos}} + \underbrace{0}_{\sum \text{transportes}}$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BA} = -35.85 \text{ kN m}}$$

Tramo BC

$$\hat{M}_{BC} = \underbrace{25}_{\text{MEP}^*} + \underbrace{10.98}_{\sum \text{repartos}} + \underbrace{(-0.1262)}_{\sum \text{transportes}}$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BC} = 35.85 \text{ kN m}}$$

$$\hat{M}_{CB} = \underbrace{(-25)}_{\text{MEP}^*} + \underbrace{(-0.2524)}_{\sum \text{repartos}} + \underbrace{5.489}_{\sum \text{transportes}}$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CB} = -19.76 \text{ kN m}}$$

Tramo CD

$$\hat{M}_{CD} = \underbrace{20}_{\text{MEP}^*} + \underbrace{(-0.2366)}_{\sum \text{repartos}} + \underbrace{0}_{\sum \text{transportes}}$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CD} = 19.76 \text{ kN m}}$$

$$\hat{M}_{DC} = 0$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{DC} = 0 \text{ kN m}}$$

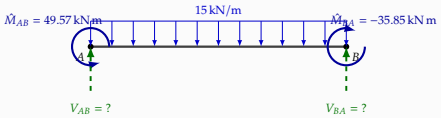
Comparación con el método matricial de rigidez:

Extremo (kN m)	Hardy Cross	Matricial	Dif.
$\hat{M}_{AB}$	49.57	49.57	$-7.755 \cdot 10^{-6}$
$\hat{M}_{BA}$	−35.85	−35.85	$-1.577 \cdot 10^{-5}$
$\hat{M}_{BC}$	35.85	35.85	$-1.877 \cdot 10^{-5}$
$\hat{M}_{CB}$	−19.76	−19.76	$-9.055 \cdot 10^{-6}$
$\hat{M}_{CD}$	19.76	19.76	$4.203 \cdot 10^{-7}$
$\hat{M}_{DC}$	0	0	0

Paso 5 Determinación de las reacciones

Con los momentos de extremo ya conocidos, cada tramo se aísla como cuerpo libre y sus dos cortantes salen de la estática.

Tramo AB



Cuerpo libre del tramo AB: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{AB}$ y $\hat{M}_{BA}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{AB} y V_{BA} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 6$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -90$ kN y momento respecto a B: $M_q = 270$ kN m.

$(\circlearrowleft +)\ \sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{AB}(6) + 49.57 + (-35.85) + 270 = 0 \quad \ldots$ (I)

$(\uparrow +)\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AB} + V_{BA} + (-90) = 0 \quad \ldots$ (II)

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

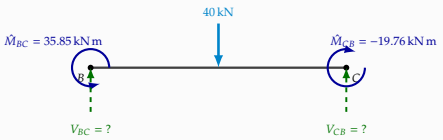
$$\Rightarrow \quad V_{AB} = \frac{49.57 + (-35.85) + 270}{6}$$

$$\Rightarrow \quad V_{AB} = \boxed{47.29 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{BA} = 90 - 47.29$$

$$\Rightarrow \quad V_{BA} = \boxed{42.71 \text{ kN}}$$

Tramo BC



Cuerpo libre del tramo BC: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{BC}$ y $\hat{M}_{CB}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{BC} y V_{CB} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 5$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -40$ kN y momento respecto a C: $M_q = 100$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_C = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{BC}(5) + 35.85 + (-19.76) + 100 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{BC} + V_{CB} + (-40) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

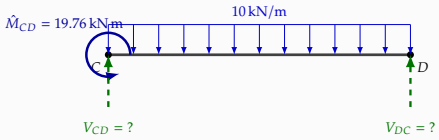
$$\Rightarrow \quad V_{BC} = \frac{35.85 + (-19.76) + 100}{5}$$

$$\Rightarrow \quad V_{BC} = \boxed{23.22 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{CB} = 40 - 23.22$$

$$\Rightarrow \quad V_{CB} = \boxed{16.78 \text{ kN}}$$

Tramo CD



Cuerpo libre del tramo CD: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{CD}$ y $\hat{M}_{DC}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{CD} y V_{DC} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$, aquí hacia arriba que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 4$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -40$ kN y momento respecto a D: $M_q = 80$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \textstyle\sum M_D = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{CD}(4) + 19.76 + 0 + 80 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$(\uparrow +)\ \textstyle\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{CD} + V_{DC} + (-40) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$$\Rightarrow \quad V_{CD} = \frac{19.76 + 0 + 80}{4}$$

$$\Rightarrow \quad V_{CD} = \boxed{24.94 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{DC} = 40 - 24.94$$

$$\Rightarrow \quad V_{DC} = \boxed{15.06 \text{ kN}}$$

Reacciones totales en apoyos

Suma de las contribuciones de todos los tramos adyacentes a cada apoyo.

Fórmula:

$$R_{\text{nudo}} = \sum_{\text{tramos}} V_{\text{tramo,nudo}}$$

Cálculo: Reacciones en apoyos:

$$A_y = V_{AB} = \boxed{47.29 \text{ kN}}$$

$$B_y = V_{BA} + V_{BC} = 42.71 + 23.22 = \boxed{65.93 \text{ kN}}$$

$$C_y = V_{CB} + V_{CD} = 16.78 + 24.94 = \boxed{41.72 \text{ kN}}$$

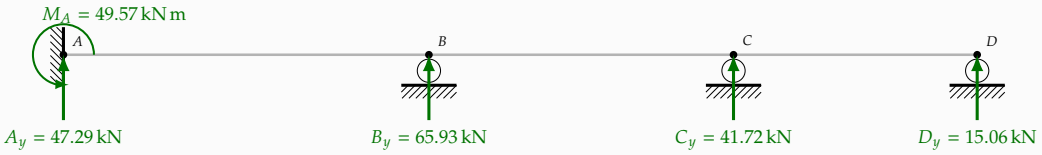
$$D_y = V_{DC} = \boxed{15.06 \text{ kN}}$$

Momentos de reacción en los empotramientos (el momento de extremo de la barra que llega, descontado el momento aplicado en el nudo):

$$M_A = \hat{M}_{AB} = \boxed{49.57\ \text{kN m}}$$

Comparación con el método matricial de rigidez:

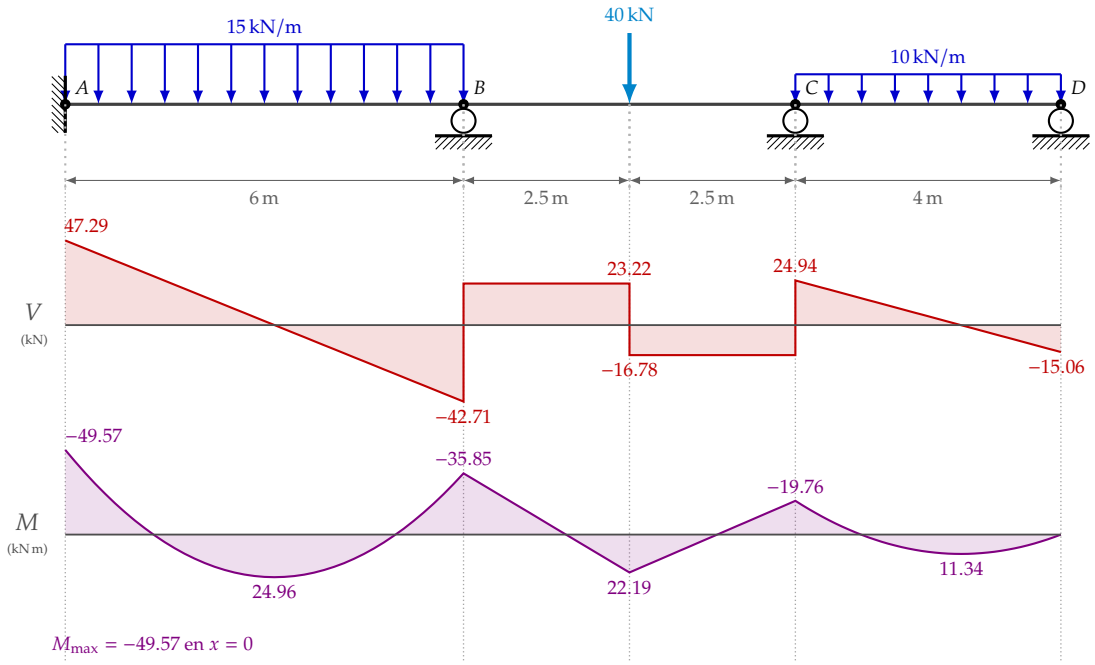
Apoyo	$\cdot_y$ por equilibrio (kN)	$\cdot_y$ matricial (kN)	Dif.
A	47.29	47.29	$-3.921 \cdot 10^{-6}$
B	65.93	65.93	$-1.644 \cdot 10^{-6}$
C	41.72	41.72	$5.67 \cdot 10^{-6}$
D	15.06	15.06	$-1.051 \cdot 10^{-7}$

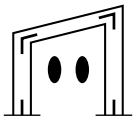


Reacciones de la viga continua.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M





Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com