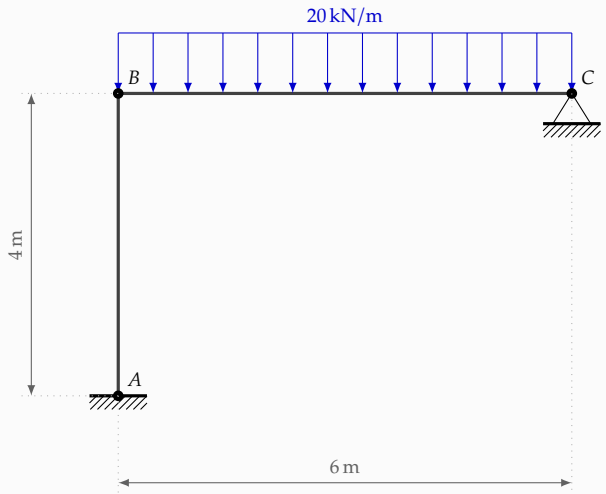
Hardy Cross para pórticos (sin ladeo lateral)

PÓRTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Distribución de momentos suponiendo que los nudos giran pero NO se trasladan (etapa de nudos fijos). Si el pórtico puede ladearse, al final se calcula la fuerza de sujeción ficticia que exigiría esta hipótesis. Convención antihoraria positiva.



Pórtico analizado.

Paso 1 Rigideces relativas y factores de distribución

$$k = \begin{cases} 4EI/L & \text{extremo lejano continuo o empotrado} \\ 3EI/L & \text{extremo lejano articulado exterior} \end{cases} \qquad FD_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

EI es constante en todas las barras, así que las rigideces se dejan en función de EI sin sustituir su valor: en $FD = k/\sum k$ aparece arriba y abajo y se simplifica. **Nudo B**

$$k_{BA} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI, \qquad k_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{6} = 0.5EI$$

$$\sum k = EI + 0.5EI = 1.5EI$$

$$FD_{BA} = \frac{EI}{1.5EI} = \boxed{0.6667}, \qquad FD_{BC} = \frac{0.5EI}{1.5EI} = \boxed{0.3333}$$



Factores de distribución en los nudos giratorios.

Paso 2 Momentos de empotramiento perfecto (cargas reales)

Cada barra se aísla biempotrada bajo su carga; en columnas y barras inclinadas solo flexiona la componente perpendicular al eje.

Barra A–B

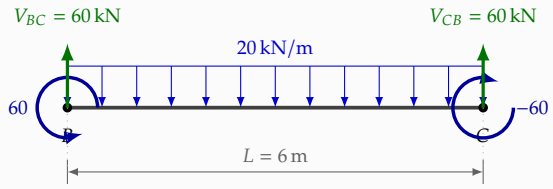


Cuerpo libre de A–B biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y +y′ positivos).

Vano **sin carga**: no hay nada que empotrar.

$$\mathrm{MEP}_{AB} = \mathrm{MEP}_{BA} = 0\ \mathrm{kN\,m}$$

Barra B–C



Cuerpo libre de B–C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $B \to C$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{BC} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(20)(6)^2}{12} = \mathbf{60}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(20)(6)^2}{12} = \mathbf{-60}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $B \to C$).

$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{wL}{2} = \frac{(20)(6)}{2} = \mathbf{60}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{BC} + V_{CB} = 60 + (60) = 120\ \text{kN} \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a C (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{BC} + \text{MEP}_{CB} + M_q = 60 + (-60) + (360) = 360$$

$$V_{BC} \cdot L = (60)(6) = 360 \checkmark$$

Paso 3 Tabla de distribución de momentos

Iteración simultánea: todos los nudos en cada ciclo

Convergencia en 1 ciclo(s); en cada ciclo se equilibran a la vez todos los nudos giratorios y después se transporta la mitad al extremo opuesto.

FD	M_{AB} (0)	M_{BA} 0.667	M_{BC} 0.333	M_{CB} —
MEP*	0	0	90	0
Dist. 1		−60	−30	
Transp. 1	−30			
$\sum$	−30	−60	60	0

Iteración condensada: equilibrio nudo a nudo

Es el *mismo* Hardy Cross, la suma final es idéntica, pero organizado como se hace a mano: en vez de dedicar un bloque de columnas a cada ciclo de *distribuir*→*transportar*, cada **fila** es un único nudo equilibrado junto con su transporte, y el nudo siguiente ya parte de lo que acaba de llegarle.

- **El extremo articulado se libera en un solo paso.** La barra que llega allí (CB en C) usa la rigidez modificada $3EI/L$, de modo que el transporte *de vuelta* hacia ese nudo es nulo: basta anular el momento una vez, fila *Lib.*, que transporta la mitad al extremo opuesto, y queda equilibrado para siempre, sin volver a iterar. Es el mismo MEP* con el que arranca la tabla anterior, solo que aquí se ve como un paso más.
- **Los empotramientos no devuelven nada.** A tiene $FD = 0$: todo lo que le llega se queda ahí y nunca lo redistribuye. Como aquí solo reparte B, no hay rebote: se equilibra una vez y lo transportado ya no vuelve.
- **Una fila por nudo equilibrado.** Cada fila es *lo que acaba de llegar* $\cdot FD$ y su transporte, *resultado* ÷2; los términos decrecen en progresión geométrica, así que la tabla se corta en cuanto son despreciables para la precisión de ingeniería.

FD	M_{AB} (0)	M_{BA} 0.667	M_{BC} 0.333	M_{CB} —
MEP	0	0	60	−60
Lib. C			30	60
Nudo B (1)	−30	−60	−30	
$\sum$	−30	−60	60	0

Sumando cada columna se llega a los mismos momentos finales que en la tabla simultánea (diferencia máxima 0 kN m): no es otro método, es la misma suma hecha en otro orden.
El pórtico no tiene modos de traslación (está arriostrado): la hipótesis de nudos fijos es exacta y estos son los momentos finales.

Paso 4 Cálculo de momentos finales

El momento final de cada extremo es su columna de la tabla sumada: el MEP de partida más todos los repartos y transportes que ha recibido.

Fórmula:

$$\hat{M}_{ij} = \text{MEP}^{*}_{ij} + \sum(\text{repartos} + \text{transportes})$$

Cálculo: Tramo AB

$$\hat{M}_{AB} = (-30)$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{AB} = -30\ \text{kN m}}$$

$$\hat{M}_{BA} = (-60)$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BA} = -60\ \text{kN m}}$$

Tramo BC

$$\hat{M}_{BC} = 90 + (-30)$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BC} = 60\ \text{kN m}}$$

$$\hat{M}_{CB} = 0$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CB} = 0\ \text{kN m}}$$

Comparación con el método matricial de rigidez:

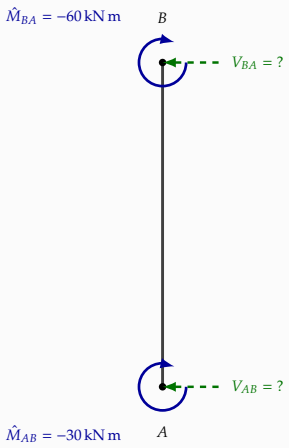
Extremo (kN m)	Cross	Matricial	Dif.
$\hat{M}_{AB}$	−30	−29.92	−0.08294
$\hat{M}_{BA}$	−60	−59.94	−0.0648
$\hat{M}_{BC}$	60	59.94	0.0648
$\hat{M}_{CB}$	0	0	0

Nota: el método desprecia la deformación axial de las barras; la pequeña diferencia respecto al matricial proviene de ahí.

Paso 5 Determinación de las reacciones

Con los momentos de extremo ya conocidos, cada tramo se aísla como cuerpo libre y sus dos cortantes salen de la estática; en un pórtico los ejes son los LOCALES de cada barra (V es el cortante transversal, no una reacción vertical).

Tramo AB



Cuerpo libre del tramo AB: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{AB}$ y $\hat{M}_{BA}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{AB} y V_{BA} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$ que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 4$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: El vano no lleva carga: $R_q = 0$ y $M_q = 0$.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_B = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{AB}(4) + (-30) + (-60) + 0 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{AB} + V_{BA} + 0 = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

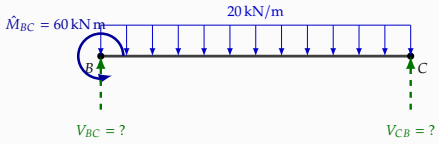
$$\Rightarrow\quad V_{AB} = \frac{(-30) + (-60) + 0}{4}$$

$$\Rightarrow\quad V_{AB} = \boxed{-22.5 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow\quad V_{BA} = 0 - (-22.5)$$

$$\Rightarrow\quad V_{BA} = \boxed{22.5 \text{ kN}}$$

Tramo BC



Cuerpo libre del tramo BC: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{BC}$ y $\hat{M}_{CB}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{BC} y V_{CB} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$ que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 6$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -120$ kN y momento respecto a C: $M_q = 360$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_C = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{BC}(6) + 60 + 0 + 360 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{BC} + V_{CB} + (-120) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$$\Rightarrow\quad V_{BC} = \frac{60 + 0 + 360}{6}$$

$$\Rightarrow\quad V_{BC} = \boxed{70\ \text{kN}}$$

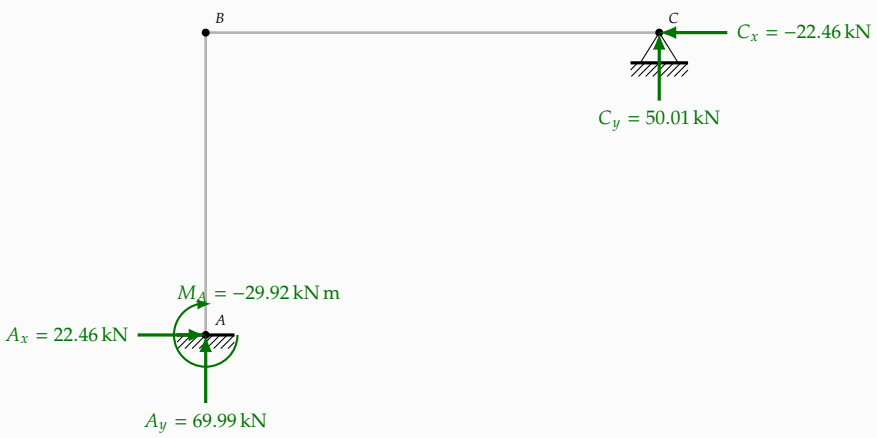
$$\Rightarrow\quad V_{CB} = 120 - 70$$

$$\Rightarrow\quad V_{CB} = \boxed{50\ \text{kN}}$$

Los esfuerzos axiles de cada barra, y con ellos las componentes horizontales de las reacciones, se obtienen después por equilibrio de cada nudo; la tabla siguiente los recoge ya resueltos.

Nodo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	$M.$ (kN m)
A	22.46	69.99	−29.92
C	−22.46	50.01	0

Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.



Reacciones en los apoyos.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

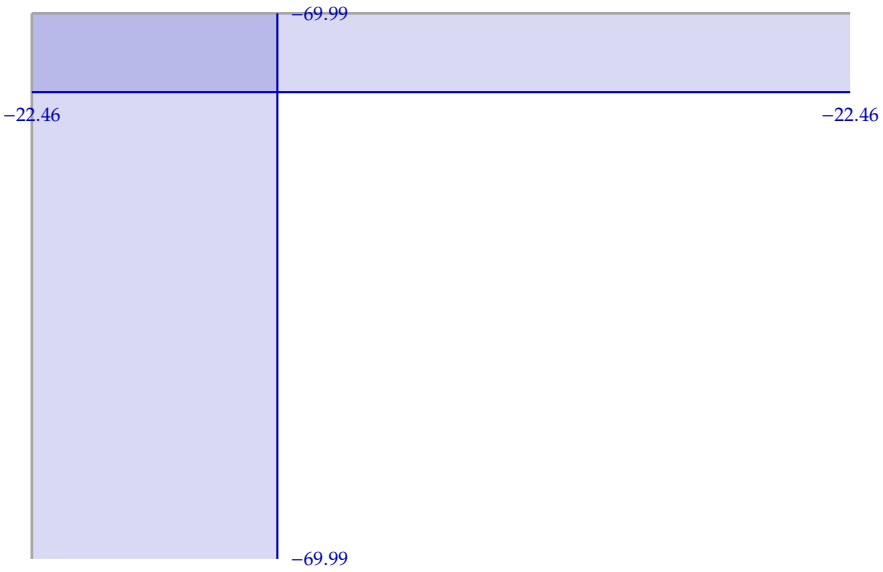


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.

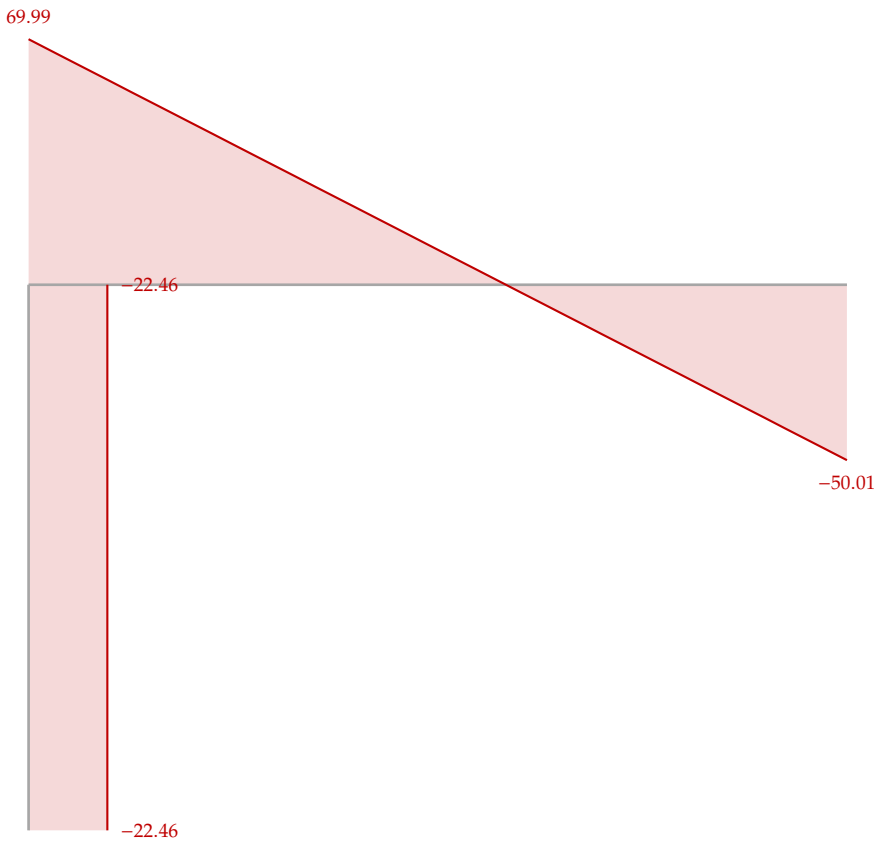


Diagrama de fuerza cortante (V), en kN.

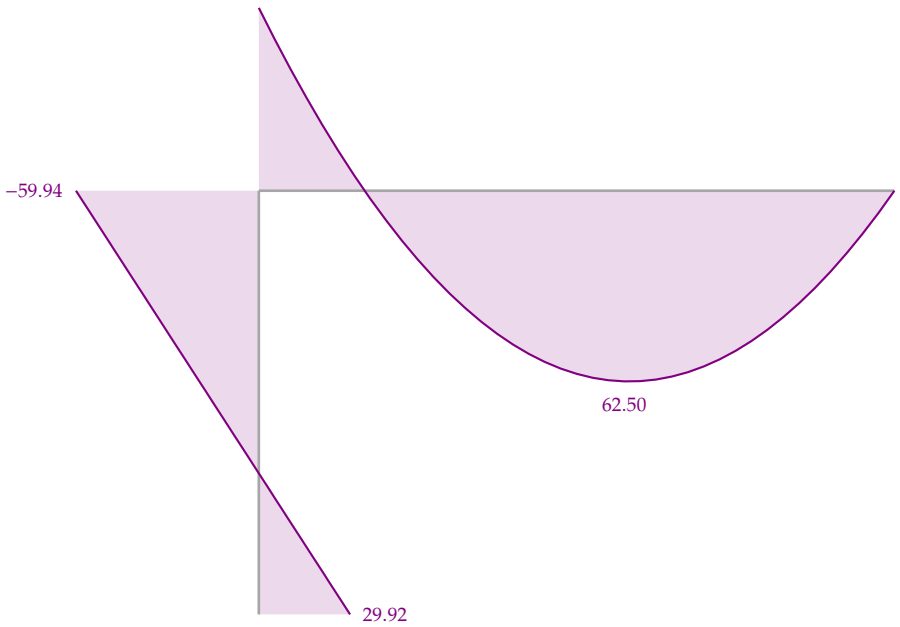


Diagrama de momento flector (M), en kN m.

Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com