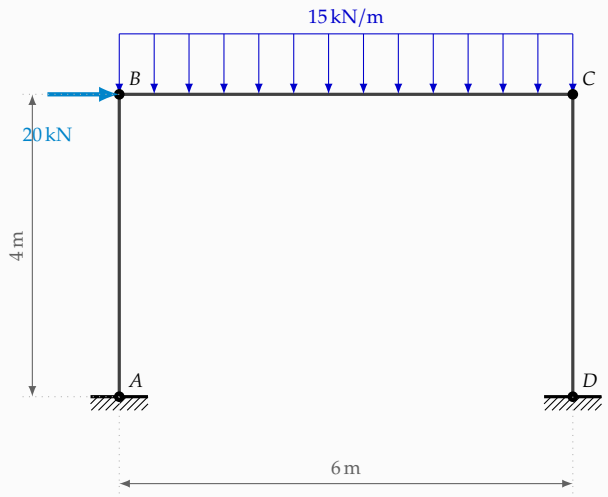
Hardy Cross para pórticos (con ladeo lateral)

PÓRTICO

EMI · *solución paso a paso*

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m^2] A [m^2] I [m^4]

Superposición clásica de etapas: (I) pórtico con los nudos impedidos de trasladarse (nudos fijos) y (II) un caso de ladeo por cada modo de traslación, con momentos de empotramiento MEP $= -6EI\psi/L$; las amplitudes se determinan con el equilibrio de piso. Convención antihoraria positiva.



Pórtico analizado.

Paso 1 Rigideces relativas y factores de distribución

$$k = \begin{cases} 4EI/L & \text{extremo lejano continuo o empotrado} \\ 3EI/L & \text{extremo lejano articulado exterior} \end{cases} \qquad FD_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

EI es constante en todas las barras, así que las rigideces se dejan en función de EI sin sustituir su valor: en $FD = k/\sum k$ aparece arriba y abajo y se simplifica. **Nudo B**

$$k_{BA} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI, \qquad k_{BC} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{6} = 0.6667EI$$

$$\sum k = EI + 0.6667EI = 1.667EI$$

$$FD_{BA} = \frac{EI}{1.667EI} = \boxed{0.6}, \qquad FD_{BC} = \frac{0.6667EI}{1.667EI} = \boxed{0.4}$$

Nudo C

$$k_{CB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{6} = 0.6667EI, \qquad k_{CD} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$\sum k = 0.6667EI + EI = 1.667EI$$

$$FD_{CB} = \frac{0.6667EI}{1.667EI} = \boxed{0.4}, \qquad FD_{CD} = \frac{EI}{1.667EI} = \boxed{0.6}$$



Factores de distribución en los nudos giratorios.

Paso 2 Momentos de empotramiento perfecto (cargas reales)

Cada barra se aísla biempotrada bajo su carga; en columnas y barras inclinadas solo flexiona la componente perpendicular al eje.

Barra A–B

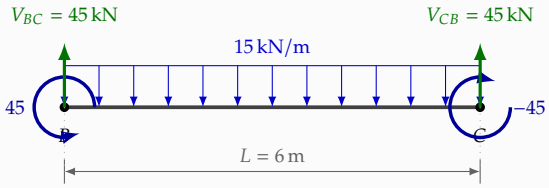


Cuerpo libre de A–B biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Vano **sin carga**: no hay nada que empotrar.

$$\text{MEP}_{AB} = \text{MEP}_{BA} = 0\ \text{kN m}$$

Barra B–C



Cuerpo libre de B–C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Componente que flexiona. Solo la parte *perpendicular* al eje produce MEP; $w > 0$ es la que empuja hacia el lado $-y'$ local, es decir hacia la derecha del sentido de recorrido $B \to C$ (hacia abajo en un vano horizontal recorrido de izquierda a derecha). La carga ya es perpendicular a la barra (tipo 1).

$$\text{MEP}_{BC} = +\frac{wL^2}{12} = +\frac{(15)(6)^2}{12} = \mathbf{45}\ \text{kN m}$$

$$\text{MEP}_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(15)(6)^2}{12} = \mathbf{-45}\ \text{kN m}$$

Reacciones de empotramiento (cortantes). Las filas de traslación de f'_{eq}: la fuerza transversal con la que cada empotramiento sostiene el vano, positiva en sentido contrario a la carga (hacia $+y'$ del recorrido $B \to C$).

$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{wL}{2} = \frac{(15)(6)}{2} = \mathbf{45}\ \text{kN}$$

Comprobación: las dos reacciones tienen que sumar la resultante transversal del vano:

$$V_{BC} + V_{CB} = 45 + (45) = 90\ \text{kN}\ \checkmark$$

Y los dos MEP, con el momento de las cargas del vano respecto a C (M_q), tienen que equilibrar el cortante multiplicado por la luz:

$$\text{MEP}_{BC} + \text{MEP}_{CB} + M_q = 45 + (-45) + (270) = 270$$

$$V_{BC} \cdot L = (45)(6) = 270\ \checkmark$$

Barra C–D



Cuerpo libre de C–D biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

Vano **sin carga**: no hay nada que empotrar.

$$\text{MEP}_{CD} = \text{MEP}_{DC} = 0\ \text{kN m}$$

Paso 3 Etapa I: distribución con nudos fijos (sin traslación)

Iteración simultánea: todos los nudos en cada ciclo

Convergencia en 13 ciclo(s); en cada ciclo se equilibran a la vez todos los nudos giratorios y después se transporta la mitad al extremo opuesto.

FD	M_{AB} (0)	M_{BA} 0.6	M_{BC} 0.4	M_{CB} 0.4	M_{CD} 0.6	M_{DC} (0)
MEP*	0	0	45	−45	0	0
Dist. 1		−27	−18	18	27	
Transp. 1	−13.5		9	−9		13.5
Dist. 2		−5.4	−3.6	3.6	5.4	
Transp. 2	−2.7		1.8	−1.8		2.7
Dist. 3		−1.08	−0.72	0.72	1.08	
Transp. 3	−0.54		0.36	−0.36		0.54
Dist. 4		−0.216	−0.144	0.144	0.216	
Transp. 4	−0.108		0.072	−0.072		0.108
Dist. 5		−0.0432	−0.0288	0.0288	0.0432	
Transp. 5	−0.0216		0.0144	−0.0144		0.0216
Dist. 6		−0.00864	−0.00576	0.00576	0.00864	
Transp. 6	−0.00432		0.00288	−0.00288		0.00432
Dist. 7		−0.001728	−0.001152	0.001152	0.001728	
Transp. 7	$-8.64 \cdot 10^{-4}$		$5.76 \cdot 10^{-4}$	$-5.76 \cdot 10^{-4}$		$8.64 \cdot 10^{-4}$
Dist. 8		$-3.456 \cdot 10^{-4}$	$-2.304 \cdot 10^{-4}$	$2.304 \cdot 10^{-4}$	$3.456 \cdot 10^{-4}$	
Transp. 8	$-1.728 \cdot 10^{-4}$		$1.152 \cdot 10^{-4}$	$-1.152 \cdot 10^{-4}$		$1.728 \cdot 10^{-4}$
Dist. 9		$-6.912 \cdot 10^{-5}$	$-4.608 \cdot 10^{-5}$	$4.608 \cdot 10^{-5}$	$6.912 \cdot 10^{-5}$	
Transp. 9	$-3.456 \cdot 10^{-5}$		$2.304 \cdot 10^{-5}$	$-2.304 \cdot 10^{-5}$		$3.456 \cdot 10^{-5}$
Dist. 10		$-1.382 \cdot 10^{-5}$	$-9.216 \cdot 10^{-6}$	$9.216 \cdot 10^{-6}$	$1.382 \cdot 10^{-5}$	
Transp. 10	$-6.912 \cdot 10^{-6}$		$4.608 \cdot 10^{-6}$	$-4.608 \cdot 10^{-6}$		$6.912 \cdot 10^{-6}$
Dist. 11		$-2.765 \cdot 10^{-6}$	$-1.843 \cdot 10^{-6}$	$1.843 \cdot 10^{-6}$	$2.765 \cdot 10^{-6}$	
Transp. 11	$-1.382 \cdot 10^{-6}$		$9.216 \cdot 10^{-7}$	$-9.216 \cdot 10^{-7}$		$1.382 \cdot 10^{-6}$
Dist. 12		$-5.53 \cdot 10^{-7}$	$-3.686 \cdot 10^{-7}$	$3.686 \cdot 10^{-7}$	$5.53 \cdot 10^{-7}$	
Transp. 12	$-2.765 \cdot 10^{-7}$		$1.843 \cdot 10^{-7}$	$-1.843 \cdot 10^{-7}$		$2.765 \cdot 10^{-7}$
Dist. 13		$-1.106 \cdot 10^{-7}$	$-7.373 \cdot 10^{-8}$	$7.373 \cdot 10^{-8}$	$1.106 \cdot 10^{-7}$	
Transp. 13	$-5.53 \cdot 10^{-8}$		$3.686 \cdot 10^{-8}$	$-3.686 \cdot 10^{-8}$		$5.53 \cdot 10^{-8}$
$\sum$	−16.87	−33.75	33.75	−33.75	33.75	16.87

Iteración condensada: equilibrio nudo a nudo

Es el *mismo* Hardy Cross, la suma final es idéntica, pero organizado como se hace a mano: en vez de dedicar un bloque de columnas a cada ciclo de *distribuir→transportar*, cada **fila** es un único nudo equilibrado junto con su transporte, y el nudo siguiente ya parte de lo que acaba de llegarle.

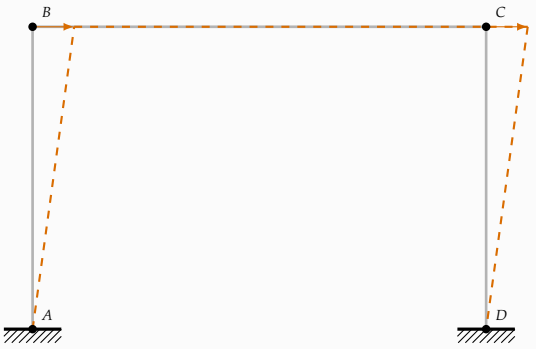
- **Los empotramientos no devuelven nada.** A y D tienen $FD = 0$: todo lo que les llega se queda ahí y nunca lo redistribuyen. Por eso el *rebote* solo ocurre entre B y C.
- **Una fila por nudo equilibrado.** Cada fila es *lo que acaba de llegar* $\cdot\, FD$ y su transporte, *resultado* $\div 2$; los términos decrecen en progresión geométrica (aquí cada rebote los reduce a ≈ 0.04 veces el anterior), así que la tabla se corta en cuanto son despreciables para la precisión de ingeniería.

FD	M_{AB} (0)	M_{BA} 0.6	M_{BC} 0.4	M_{CB} 0.4	M_{CD} 0.6	M_{DC} (0)
MEP	0	0	45	−45	0	0
Nudo B (1)	−13.5	−27	−18	−9		
Nudo C (1)			10.8	21.6	32.4	16.2
Nudo B (2)	−3.24	−6.48	−4.32	−2.16		
Nudo C (2)			0.432	0.864	1.296	0.648
Nudo B (3)	−0.1296	−0.2592	−0.1728	−0.0864		
Nudo C (3)			0.01728	0.03456	0.05184	0.02592
Nudo B (4)	−0.005184	−0.01037	−0.006912	−0.003456		
Nudo C (4)			$6.912 \cdot 10^{-4}$	0.001382	0.002074	0.001037
Nudo B (5)	$-2.074 \cdot 10^{-4}$	$-4.147 \cdot 10^{-4}$	$-2.765 \cdot 10^{-4}$	$-1.382 \cdot 10^{-4}$		
Nudo C (5)			$2.765 \cdot 10^{-5}$	$5.53 \cdot 10^{-5}$	$8.294 \cdot 10^{-5}$	$4.147 \cdot 10^{-5}$
$\sum$	−16.87	−33.75	33.75	−33.75	33.75	16.87

Se han omitido 4 filas más, despreciables, la mayor de ellas vale $1.7 \cdot 10^{-5}$ kN m; la fila $\sum$ sí recoge la convergencia completa. Sumando cada columna se llega a los mismos momentos finales que en la tabla simultánea (diferencia máxima $2.212 \cdot 10^{-8}$ kN m): no es otro método, es la misma suma hecha en otro orden.

Paso 4 Etapa II: casos de ladeo

Caso de ladeo 1 ($\Delta_1' = 1$)



Modo de ladeo 1: rotaciones de cuerda ψ.

Se impone el desplazamiento del modo con los nudos bloqueados al giro. Una barra cuyos extremos se desplazan uno respecto al otro gira su cuerda un ángulo $\psi = \Delta_\perp / L$, y ese giro de cuerda produce en la barra biempotrada:

$$\mathrm{MEP}^{\psi} = -\frac{6EI\,\psi}{L} \quad \text{(igual en los dos extremos)}$$

$$\mathrm{MEP}^{\psi}_{AB} = \mathrm{MEP}^{\psi}_{BA} = -\frac{6(20000)(-0.25)}{4} = \boxed{7500\ \text{kN m}}$$

$$\text{MEP}^{\psi}_{CD} = \text{MEP}^{\psi}_{DC} = -\frac{6(20000)(-0.25)}{4} = \boxed{7500\ \text{kN m}}$$

Las barras no listadas tienen $\psi = 0$ en este modo y por tanto $\text{MEP}^{\psi} = 0$.

Iteración simultánea: todos los nudos en cada ciclo

FD	M_{AB} (0)	M_{BA} 0.6	M_{BC} 0.4	M_{CB} 0.4	M_{CD} 0.6	M_{DC} (0)
MEP*	7500	7500	0	0	7500	7500
Dist. 1		−4500	−3000	−3000	−4500	
Transp. 1	−2250		−1500	−1500		−2250
Dist. 2		900	600	600	900	
Transp. 2	450		300	300		450
Dist. 3		−180	−120	−120	−180	
Transp. 3	−90		−60	−60		−90
Dist. 4		36	24	24	36	
Transp. 4	18		12	12		18
Dist. 5		−7.2	−4.8	−4.8	−7.2	
Transp. 5	−3.6		−2.4	−2.4		−3.6
Dist. 6		1.44	0.96	0.96	1.44	
Transp. 6	0.72		0.48	0.48		0.72
Dist. 7		−0.288	−0.192	−0.192	−0.288	
Transp. 7	−0.144		−0.096	−0.096		−0.144
Dist. 8		0.0576	0.0384	0.0384	0.0576	
Transp. 8	0.0288		0.0192	0.0192		0.0288
Dist. 9		−0.01152	−0.00768	−0.00768	−0.01152	
Transp. 9	−0.00576		−0.00384	−0.00384		−0.00576
Dist. 10		0.002304	0.001536	0.001536	0.002304	
Transp. 10	0.001152		$7.68 \cdot 10^{-4}$	$7.68 \cdot 10^{-4}$		0.001152
Dist. 11		$-4.608 \cdot 10^{-4}$	$-3.072 \cdot 10^{-4}$	$-3.072 \cdot 10^{-4}$	$-4.608 \cdot 10^{-4}$	
Transp. 11	$-2.304 \cdot 10^{-4}$		$-1.536 \cdot 10^{-4}$	$-1.536 \cdot 10^{-4}$		$-2.304 \cdot 10^{-4}$
Dist. 12		$9.216 \cdot 10^{-5}$	$6.144 \cdot 10^{-5}$	$6.144 \cdot 10^{-5}$	$9.216 \cdot 10^{-5}$	
Transp. 12	$4.608 \cdot 10^{-5}$		$3.072 \cdot 10^{-5}$	$3.072 \cdot 10^{-5}$		$4.608 \cdot 10^{-5}$
Dist. 13		$-1.843 \cdot 10^{-5}$	$-1.229 \cdot 10^{-5}$	$-1.229 \cdot 10^{-5}$	$-1.843 \cdot 10^{-5}$	
Transp. 13	$-9.216 \cdot 10^{-6}$		$-6.144 \cdot 10^{-6}$	$-6.144 \cdot 10^{-6}$		$-9.216 \cdot 10^{-6}$
$\sum$	5625	3750	−3750	−3750	3750	5625

Iteración condensada: equilibrio nudo a nudo

FD	M_{AB} (0)	M_{BA} 0.6	M_{BC} 0.4	M_{CB} 0.4	M_{CD} 0.6	M_{DC} (0)
MEP	7500	7500	0	0	7500	7500
Nudo B (1)	−2250	−4500	−3000	−1500		
Nudo C (1)			−1200	−2400	−3600	−1800
Nudo B (2)	360	720	480	240		
Nudo C (2)			−48	−96	−144	−72
Nudo B (3)	14.4	28.8	19.2	9.6		
Nudo C (3)			−1.92	−3.84	−5.76	−2.88
Nudo B (4)	0.576	1.152	0.768	0.384		
Nudo C (4)			−0.0768	−0.1536	−0.2304	−0.1152
Nudo B (5)	0.02304	0.04608	0.03072	0.01536		
Nudo C (5)			−0.003072	−0.006144	−0.009216	−0.004608
$\sum$	5625	3750	−3750	−3750	3750	5625

Se han omitido 4 filas más, despreciables, la mayor de ellas vale 0.0018 kN m; la fila $\sum$ sí recoge la convergencia completa. Sumando cada columna se llega a los mismos momentos finales que en la tabla simultánea (diferencia máxima $3.686 \cdot 10^{-6}$ kN m): no es otro método, es la misma suma hecha en otro orden.

Paso 5 Superposición y equilibrio de piso

Los momentos finales son $M = M^I + \sum_k q_k M^{II,k}$; las amplitudes q_k anulan la fuerza de sujeción de cada modo:

$$\left[-4687\right]\left\{q_1\right\} = \left[-20\right]$$

$$\left\{q_1\right\} = \left[0.004267\right]$$

Paso 6 Cálculo de momentos finales

El momento final de cada extremo es el de la etapa de nudos fijos más las etapas de ladeo multiplicadas por sus amplitudes.

Fórmula:

$$\hat{M}_{ij} = M^I_{ij} + \sum_k q_k M^{II,k}_{ij}$$

Cálculo: **Tramo AB**

$$\hat{M}_{AB} = (-16.87) + (0.004267)5625$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{AB} = 7.125\ \text{kN m}}$$

$$\hat{M}_{BA} = (-33.75) + (0.004267)3750$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BA} = -17.75\ \text{kN m}}$$

Tramo BC

$$\hat{M}_{BC} = 33.75 + (0.004267)(-3750)$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BC} = 17.75\ \text{kN m}}$$

$$\hat{M}_{CB} = (-33.75) + (0.004267)(-3750)$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CB} = -49.75\ \text{kN m}}$$

Tramo CD

$$\hat{M}_{CD} = 33.75 + (0.004267)3750$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CD} = 49.75\ \text{kN m}}$$

$$\hat{M}_{DC} = 16.87 + (0.004267)5625$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{DC} = 40.87\ \text{kN m}}$$

Comparación con el método matricial de rigidez:

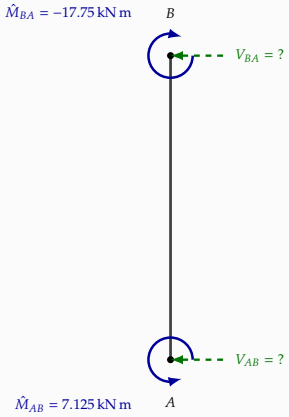
Extremo (kN m)	Cross	Matricial	Dif.
$\hat{M}_{AB}$	7.125	7.16	−0.03469
$\hat{M}_{BA}$	−17.75	−17.74	−0.009894
$\hat{M}_{BC}$	17.75	17.74	0.009894
$\hat{M}_{CB}$	−49.75	−49.73	−0.01558
$\hat{M}_{CD}$	49.75	49.73	0.01558
$\hat{M}_{DC}$	40.87	40.85	0.029

Nota: el método desprecia la deformación axial de las barras; la pequeña diferencia respecto al matricial proviene de ahí.

Paso 7 Determinación de las reacciones

Con los momentos de extremo ya conocidos, cada tramo se aísla como cuerpo libre y sus dos cortantes salen de la estática; en un pórtico los ejes son los LOCALES de cada barra (V es el cortante transversal, no una reacción vertical).

Tramo AB



Cuerpo libre del tramo AB: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{AB}$ y $\hat{M}_{BA}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{AB} y V_{BA} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$ que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 4$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: El vano no lleva carga: $R_q = 0$ y $M_q = 0$.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_B = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{AB}(4) + 7.125 + (-17.75) + 0 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{AB} + V_{BA} + 0 = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

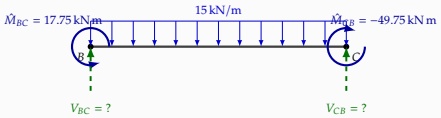
$$\Rightarrow\quad V_{AB} = \frac{7.125 + (-17.75) + 0}{4}$$

$$\Rightarrow\quad V_{AB} = \boxed{-2.656 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow\quad V_{BA} = 0 - (-2.656)$$

$$\Rightarrow\quad V_{BA} = \boxed{2.656 \text{ kN}}$$

Tramo BC



Cuerpo libre del tramo BC: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{BC}$ y $\hat{M}_{CB}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{BC} y V_{CB} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$ que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 6$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: Cargas del vano: resultante $R_q = -90$ kN y momento respecto a C: $M_q = 270$ kN m.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_C = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{BC}(6) + 17.75 + (-49.75) + 270 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{BC} + V_{CB} + (-90) = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

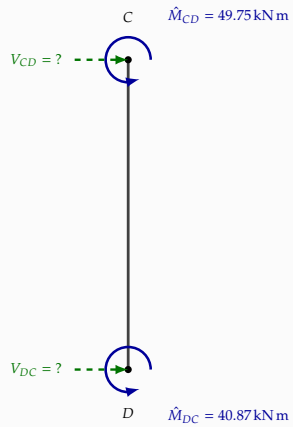
$$\Rightarrow \quad V_{BC} = \frac{17.75 + (-49.75) + 270}{6}$$

$$\Rightarrow \quad V_{BC} = \boxed{39.67 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{CB} = 90 - 39.67$$

$$\Rightarrow \quad V_{CB} = \boxed{50.33 \text{ kN}}$$

Tramo CD



Cuerpo libre del tramo CD: cargas del vano (rojo), momentos de extremo ya calculados $\hat{M}_{CD}$ y $\hat{M}_{DC}$ (azul, kN m, antihorario positivo) y los cortantes incógnita V_{CD} y V_{DC} (verde a trazos, dibujados en el sentido local $+y'$ que suponen las ecuaciones).

Equilibrio estático del tramo aislado, con $L = 4$ m.

Fórmula:

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; V_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji} + M_q}{L}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; V_{ji} = -R_q - V_{ij}$$

Cálculo: El vano no lleva carga: $R_q = 0$ y $M_q = 0$.

$$(\circlearrowleft +)\ \sum M_D = 0 \quad\Rightarrow\quad -V_{CD}(4) + 49.75 + 40.87 + 0 = 0 \quad \text{... (I)}$$

$$\sum F_{y'} = 0 \quad\Rightarrow\quad V_{CD} + V_{DC} + 0 = 0 \quad \text{... (II)}$$

Resolviendo (I) y (II) obtenemos:

$$\Rightarrow\quad V_{CD} = \frac{49.75 + 40.87 + 0}{4}$$

$$\Rightarrow\quad V_{CD} = \boxed{22.66 \text{ kN}}$$

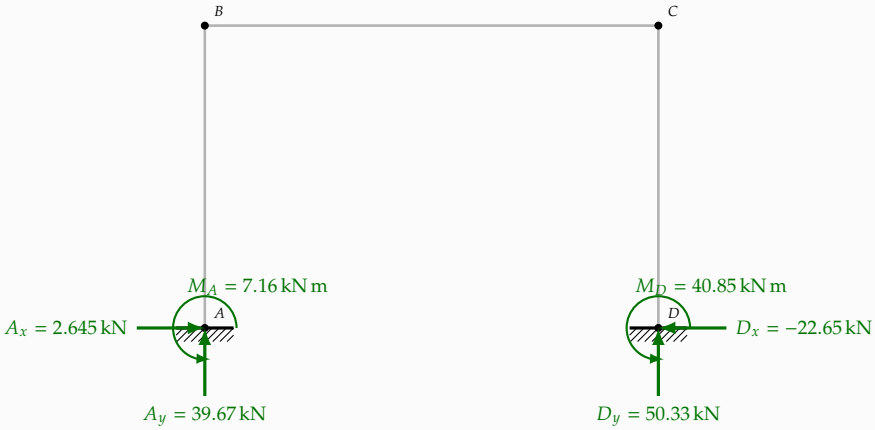
$$\Rightarrow\quad V_{DC} = 0 - 22.66$$

$$\Rightarrow\quad V_{DC} = \boxed{-22.66 \text{ kN}}$$

Los esfuerzos axiles de cada barra, y con ellos las componentes horizontales de las reacciones, se obtienen después por equilibrio de cada nudo; la tabla siguiente los recoge ya resueltos.

Nodo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	$M.$ (kN m)
A	2.645	39.67	7.16
D	−22.65	50.33	40.85

Cada fila es un nudo: las suyas son A_x (horizontal), A_y (vertical) y M_A (momento) si el nudo se llama A.



Reacciones en los apoyos.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N, fuerza cortante V y momento flector M

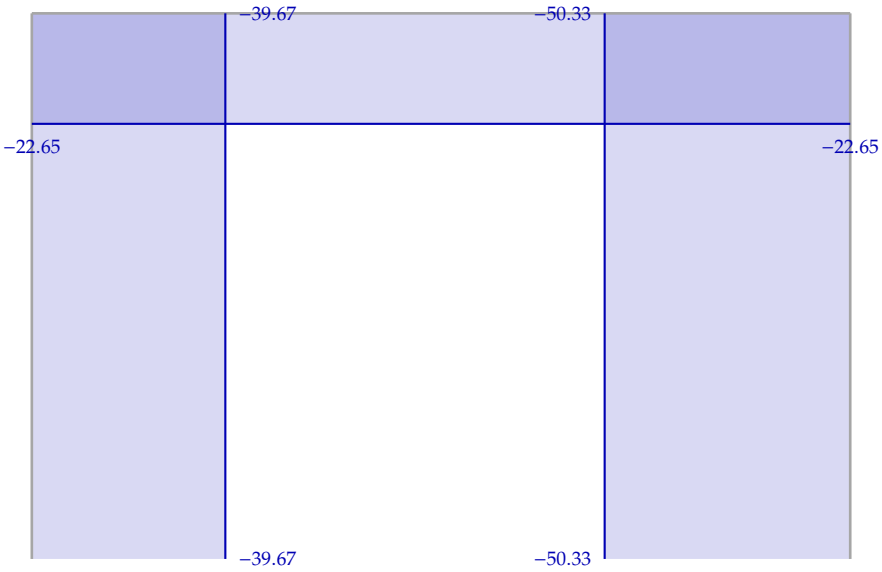


Diagrama de fuerza axial (N), en kN.

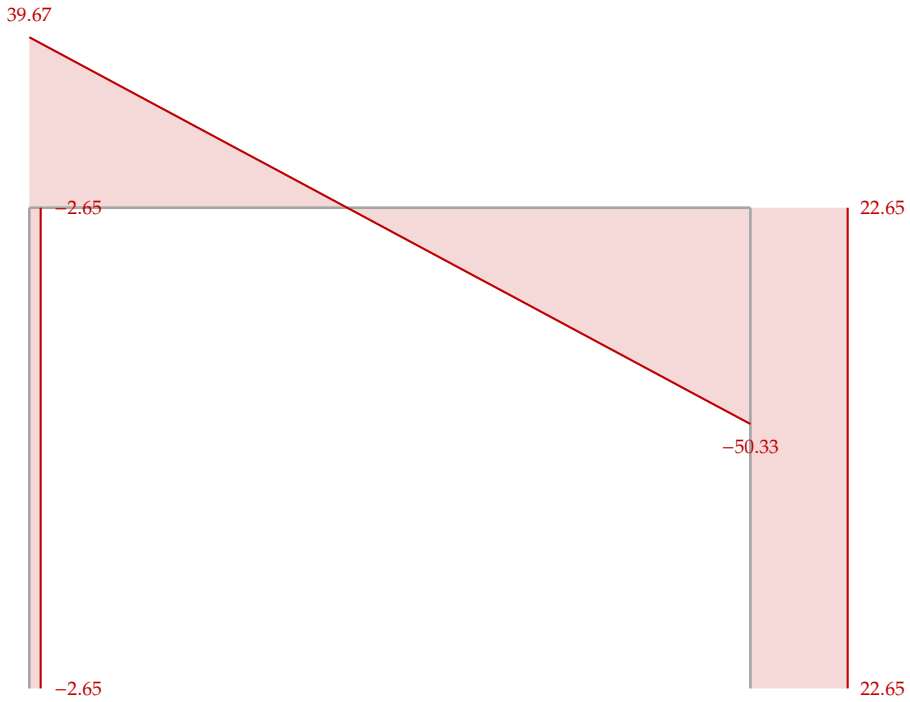


Diagrama de fuerza cortante (V), en kN.

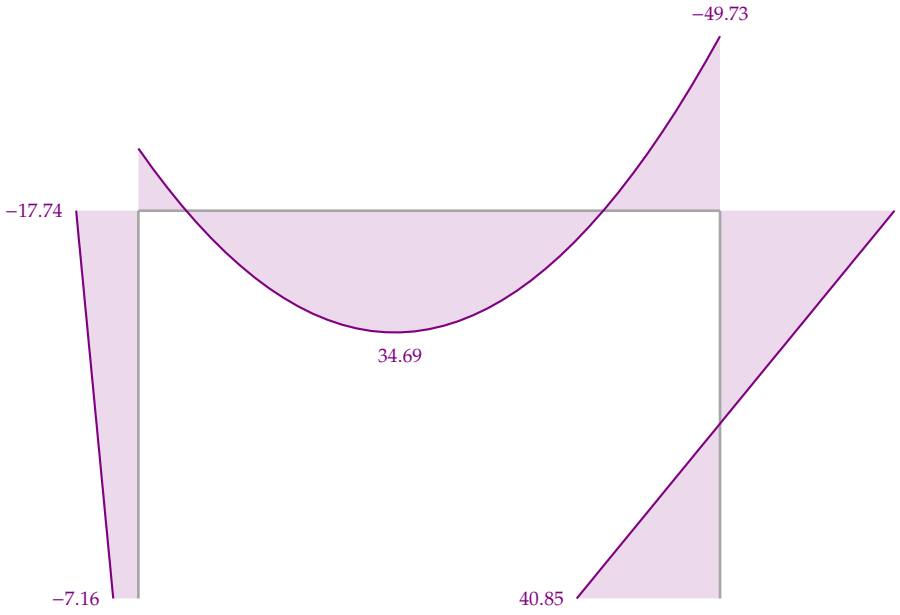
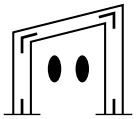


Diagrama de momento flector (M), en kN m.



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com